UFES

Universidade Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

Ana Emilia de Melo Queiroz

A Conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas no uso de Expressões da Representação Visual em uma Interface Educativa

Vitória/ES

2012

A Conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas no uso de Expressões da Representação Visual em uma Interface Educativa

Ana Emilia de Melo Queiroz

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Psicologia.
Orientador: Dr. Sávio Silveira de Queiroz

Vitória/ES

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Queiroz, Ana Emilia de Melo, 1971-Q3c

A conceitualização sobre estruturas aditivas e multiplicativas no uso de expressões da representação visual em uma interface educativa / Ana Emilia de Melo Queiroz. – 2012. 212 p. : il.

Orientador: Sávio Silveira de Queiroz.

Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Humanas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Psicologia.

1. Homem - Desenvolvimento. 2. Aprendizagem. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Gérard (Software). I. Queiroz, Sávio Silveira de, 1960-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Humanas e Naturais. III. Título.

CDU: 159.9

A CONCEITUALIZAÇÃO SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS NO USO DE FORMAS DE REPRESENTAÇÃO VISUAL EM UMA INTERFACE EDUCATIVA

ANA EMILIA DE MELO QUEIROZ

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Psicologia.

Aprovada em 13 de julho de 2012, por:

Prof. Dr. Sávio Silveira de Queiroz - Orientador, UFES.

Profª. Drª. Rosana Suemi Tokumaru, UFES.

Prof. Dr. Orivaldo de Lira Tavares, UFES

Prof. Dr. Crediné Silva de Menezes, UFRGS

Prof. Dr. Paulo Menandro, UFES

Dedicado ao meu pai e minha mãe, João de Queiroz Chaves e Maria Luiza de Melo Queioz e ao meu marido, Antônio Augusto Ribeiro dos Santos

Agradecimentos

Neste momento, lembro-me dos professores do Ensino Fundamental, participantes desta pesquisa, que estiveram presentes em nossos encontros, nos receberam de braços abertos, foram generosos e se colocaram a disposição, mesmo quando havia pouca disponibilidade de tempo. Além deles, cito os colegas da SEDUC- Secretaria de Educação de Juazeiro-BA, esse grupo de profissionais ajudou na construção do projeto de extensão, sugerindo os nomes das escolas participantes; coordenou a marcação dos encontros na UNIVASF; agendou as datas das visitas nas escolas e disponibilizou o transporte nas visitas às escolas rurais. Enfim a SEDUC cumpriu seu papel como incentivadora de projetos desta natureza. Durante a trajetória do doutorado o caminho às vezes é claro, às vezes não. Nos momentos de escuridão surgiram focos de luz, que me guiaram e me fizeram seguir adiante. Por isso, agradeço a todos àqueles que me questionaram proporcionando um momento de reflexão e, dessa forma, ajudaram-me a prosseguir. Nesse conjunto de colegas estão: o meu orientador Sávio Queiroz, todos os professores do programa e meus colegas do Colegiado de Engenharia da Computação, que agiram com postura comprometida, incentivadora e reconhecedora do esforço empreendido. As direções escolhidas, em nossas vidas, podem ser determinadas pelas oportunidades que recebemos. Oportunidades de viver com saúde, com acesso à educação familiar e escolar, com acesso à educação formal e à vida com dignidade. Todas essas oportunidades me foram proporcionadas pela minha família, a quem agradeço e dedico todo o meu trabalho, aos meus pais João de Queiroz Chaves e Maria Luiza de Melo Queiroz e ao meu marido Antônio Augusto Ribeiro dos Santos.

QUEIROZ A. E. de Melo. A conceitualização sobre estruturas aditivas e multiplicativas no uso de formas de representação visual em uma interface educativa. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal do Espírito Santo. 307. p

Resumo

O software Gérard, disponível em http://www.univasf.edu.br/ãna.queiroz/GerardApplet.html é uma interface educativa voltada para a formação de professores sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas as quais são mais popularmente conhecidas como soma, subtração, multiplicação e divisão. Trabalhos preliminares do autor verificaram a efetividade dessa interface na aprendizagem de conceitos específicos; entretanto, a conceitualização ou processo por meio do qual ocorreu tal aprendizagem não foi analisado, nesse processo estão incluídos os conceitos matemáticos e suas representações metafóricas; o usuário e seus conhecimentos prévios, assim como as modalidades de interação no uso do computador. O objetivo desta pesquisa foi, portanto, identificar a conceitualização sobre estruturas aditivas e multiplicativas no uso do software Gérard. Este é um estudo quasi-experimental realizado com (07) sete professores em duas escolas da cidade de Juazeiro (BA). A coleta de dados ocorreu por meio de filmagens, gravações e entrevistas semi-estruturadas. Os resultados obtidos apontam uma mudança no discurso dos usuários, não do status do conceito, mas de elementos relativos ao processo reflexivo coexistente com a realização da tarefa. Além disso, houve ainda a predominância de termos relacionados a fatores afetivos e motivacionais, bem como à consciência meta conceitual, a qual se refere ao pensamento do aprendiz sobre a relação entre seus conhecimentos prévios e as exigências cognitivas da tarefa. Tais resultados podem ser usados como insumos na construção de interfaces educativas voltadas para o ensino de estruturas aditivas e multiplicativas.

Palavras-chave: Desenvolvimento Humano e Aprendizagem. Estruturas aditivas e multiplicativas. Ferramentas para ensino da Matemática. Representações visuais de conceitos matemáticos. Estilo de interação.

Queiroz A. E. de Melo. The conceptualization of additive and multiplicative structures in the use of visual representation forms in an educational interface. Doctoral Thesis, Graduate Program in Psychology, Federal University of Espírito Santo. 307 p.

Abstract

The software Gérard located at http://www.univasf.edu.br/ ana.queiroz/GerardApplet.html is an educational interface dedicated to the training of teachers about Additive and Multiplicative Structures, which are more popularly known as addition, subtraction, multiplication and division. Preliminary work of the author stated the effectiveness of this interface in the learning of specific concepts. However, the conceptualization or process through which such learning occurred was not analyzed. This process includes the mathematical concepts and its metaphorical representations; the user and his previous knowledge, as well as the interaction modalities on the computer. The aim of this study was, therefore, to identify the conceptualization of additive and multiplicative structures in the use of Gérard interfaces. This is an exploratory quasi-experimental qualitative study carried out with (07) seven teachers in two schools in the city of Juazeiro/ BA. Data collection occurred through filming, recordings and semi-structured interviews. The obtained results indicate a change in the discourse of the users, not of the status of the concept, but of elements relative to the reflexive, co-existent process during the realization of the task. Furthermore, there still was a predominance of terms related to affective and motivational factors, as well as meta conceptual consciousness, which refers to the learner's thinking about the relationship between their previous knowledge and the cognitive demands of the task. Such results can be used as a input for the construction of educational interfaces aiming to teach additive and multiplicative structures.

Keywords: Human Development and Learning. Additive and multiplicative structures. Tools for teaching Mathematics. Visual representations of Mathematical concepts. Interaction style.

Queiroz A. E. de Melo. The conceptualization of additive and multiplicative structures in the use of visual representation forms in an educational interface. Doctoral Thesis, Graduate Program in Psychology, Federal University of Espírito Santo. 307 p.

RÉSUMÉ

Le logiciel Gérard, disponible à http://www.univasf.edu.br/ ana.queiroz/GerardApplet.html , est une interface dédiée à la formation pédagogique des enseignants sur les Structures Additives et Multiplicatives, qui sont plus populairement connue comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Les travaux préliminaires de l'auteur (Braga et al., 2008; Queiroz et al., 2010) ont étudié l'efficacité de cette interface dans l'apprentissage des concepts spécifiques. Cependant, le processus par lequel elle a eu lieu n'a pas été analysé. Ce processus comprend les concepts mathématiques et leurs représentations métaphoriques, l'utilisateur et ses connaissances antérieures, ainsi que les modalités d'interaction dans l'utilisation de l'ordinateur. L'objectif de cette étude était donc d'identifier la conceptualisation des structures additives et multiplicatives dans l'utilisation du logiciel Gérard. Il s'agit d'une étude qualitative exploratoire qui a été réalisée avec (07) sept enseignants dans deux écoles de la ville de Juazeiro / BA. La collecte de données s'est produite au moyen d'entrevues tournage, d'enregistrement et d'entretiens semi-structurés. Les résultats obtenus indiquent un changement dans le discours des utilisateurs, et ne pas dans la position du concept, mais d'éléments relatifs au processus réflexif, coexistent du devoir. En addition, il y avait une prédominance de termes liés à des facteurs affectifs e motivationnels, ainsi que la conscience méta conceptuelle qui se réfère à la pensée de l'apprenant sur la relation entre leurs connaissances antérieures et les exigences cognitives de la tâche. Ces résultats peuvent être utilisés comme ... pour construire des interfaces éducationnelles avec l'objectif d'enseigner les structures d'addition et de multiplication.

Keywords: Mots-clés: Développement humain et l'Apprentissage. Structures de l'Addition et de la multiplication. Outils pour l'enseignement de la mathématique. Les représentations visuelles des concepts mathématiques. Style d'interaction.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interação entre o usuário e computador 7
Figura 2 – Modalidade de interação do tipo conversação 10
Figura 3 – Preenchimento de formulário com verificação de erro 10
Figura 4 – Modalidade de Manipulação Direta 11
Figura 5 – Manipulação Direta 12
Figura 6 – Efeitos da navegação são vistas em diferentes representações 13
Figura 7 – Exemplo de Animação 14
Figura 8 – Anotações inseridas em uma função hiperbólica retangular 15
Figura 9 – Anotações automáticas para indicar o caminho percorrido 16
Figura 10 – Ks Chunking permite a construção de uma figura repetida K vezes . . 16
Figura 11 – Exemplo de agrupamento 17
Figura 12 – Composição de uma VMR por meio de menu 18
Figura 13 – Uma estrutura de rede infinita mostrando apenas a parte cortada . . . 18
Figura 14 – Um cone cortado por meio de um plano. 19
Figura 15 – Exemplo de filtragem 20
Figura 16 – Exemplo de Fragmentação 20
Figura 17 – Exemplo de fragmentação em 3D 21
Figura 18 – Exemplo de Investigação 21
Figura 19 – Exemplo de Rearranjar 22
Figura 20 – Exemplo de repcturing 22
Figura 21 – Exemplo de Repintar 23
Figura 22 – Exemplo de repintar semanticamente 24
Figura 23 – Primeira versão do Gèrard 25
Figura 24 – Diagrama de Transformação aplicada a uma medida 26
Figura 25 – -Conceito segundo Vergnaud 37
Figura 26 – Protótipo em papel 38
Figura 27 – Experimento com protótipo em papel 39
Figura 28 – Exemplo de compontente construido em papel 39
Figura 29 – Protótipo de dispositivo móvel 39
Figura 30 – Exemplo da criação de códigos ou codificação aberta 41
Figura 31 – Exemplo da criação de relacionamentos ou links 42
Figura 32 – Estatísticas sobre a pesquisa 43
Figura 33 – Relacionamento entre pares de códigos 43
Figura 34 – Fluxograma da metodologia executada 47
Figura 35 – Transparências marcadas para realçar elementos do texto 51
Figura 36 – Unidade de análise 53

Figura 37 – Representações para ensinar o conceito de número 61
Figura 38 – Linha Numerada 62
Figura 39 – Cartão de seta 62
Figura 40 – Segmento de linha 63
Figura 41 – Exemplo do uso da superfície retangular 63
Figura 42 – Exemplo do uso da linha numerada 64
Figura 43 – Desenhando barras sobre as outras 65
Figura 44 – Comparação com gráfico de barras com quantidades 65
Figura 45 – Comparação com gráfico de barras com nomes 65
Figura 46 – Iniciando em diferentes pontos de partida 66
Figura 47 – Figura decorativa 68
Figura 48 – Figura informativa 69
Figura 49 – Linguagem Logo 75
Figura 50 – Anotação sobre inseridas em uma função hiperbólica retangular 76
Figura 51 – Ks Chunking para construir de uma figura repetida K vezes 76
Figura 52 – Exemplo de filtragem. 77
Figura 53 – Exemplo de Scoping 77
Figura 54 – Exemplo de buscar 78
Figura 55 – Legenda de Vergnaud 80
Figura 56 – Interface do Gerard 80
Figura 57 – Protótipo em papel 84
Figura 58 – Exemplos do uso de cores e formas 86
Figura 59 – Exemplo do uso de cores para diferenciar os elementos do texto 86
Figura 60 – Uso de cores para diferenciar o papel dos elementos no diagrama 87
Figura 61 – Mensagens de feedback no Gerard 87
Figura 62 – Unidade de Análise 88
Figura 63 – Elementos na representação e no conceito de rotação 100
Figura 64 – Quadrado em cima do texto 102
Figura 65 – Interface do Gerard 105
Figura 66 – Protótipo em papel 108
Figura 67 – Diagrama de Composição de medidas 108
Figura 68 – Exemplo do uso de cores para diferenciar os elementos do texto 109
Figura 69 – Uso de cores para diferenciar o papel dos elementos no diagrama 109
Figura 70 – Unidade de Análise 110
Figura 71 – Exposição ao conceito 111
Figura 72 – Significados do diagrama vazio 114
Figura 73 – Esquema de Multiplicação 120
Figura 74 – Esquema de divisão por cotas 121
Figura 75 – Esquema de divisão por cotas 122

Figura 76 – História de uso, ações do usuário e da interface 124
Figura 77 – Protótipo em papel 125
Figura 78 – No inicio da interação com diagrama incompleto 126
Figura 79 – Ocorrências de termos 131
Figura 80 – Manipulação da representação 135
Figura 81 – Diagrama de Composição de medidas 140
Figura 82 – Diagrama de Comparação de medidas 140
Figura 83 – Componente para selecionar a representação 143
Figura 84 – Componentes para marcar elementos no texto 144
Figura 85 – Texto e diagrama 145

Lista de quadros

Quadro 1 – Legenda de Vergnaud para representar conceitos 34
Quadro 2 – Situações-problema do campo aditivo 35
Quadro 3 – Situações-problema do campo multiplicativo 36
Quadro 4 – Plano de análise de dados 46
Quadro 5 – Características dos participantes 48
Quadro 6 – Situacoes-problema do campo aditivo. 49
Quadro 7 – Situacoes-problema do campo multiplictivo 49
Quadro 8 – Tarefas executadas pelo usuário 81
Quadro 9 – Participantes da pesquisa 83
Quadro 10 – Situações-problema do campo aditivo presente no experimento 84
Quadro 11 – Representações versus modalidades de interação. 89
Quadro 12 – Conceitos que predominaram nas situações-problema 89
Quadro 13 – Outros elementos presentes no discurso dos usuários. 90
Quadro 14 – Conceitos relacionados a elementos da representação. 91
Quadro 15 – Relacionamentos entre a representação e elementos do Quadro 13 . . 91
Quadro 16 – Relacionamento entre o Quadro 13, Quadro 14 e Quadro 15 93
Quadro 17 – Retirada Gradativa de indicativos na tarefa de Composição de Medidas. 95
Quadro 18 – Protocolo verbal versus necessidades de novas modalidades de interação. 96
Quadro 19 – Contingências observadas nos usuários com mais alta escolaridade. . . 97
Quadro 20 – Participantes da Pesquisa. 107
Quadro 21 – Situações-problema do campo aditivo presente no experimento 107
Quadro 22 – Significado de cada elemento no processo 112
Quadro 23 – Relação entre os elementos presentes no texto e no diagrama 113
Quadro 24 – Impressões sobre diagrama vazio 113
Quadro 25 – Impressões sobre Diagrama Preenchido 114
Quadro 26 – Iniciais ideias matemáticas 115
Quadro 27 – Impressões gerais sobre o uso do software 115
Quadro 28 – Impressões sobre o primeiro contato com o software 115
Quadro 29 – Explicações antes e depois da vivência 116
Quadro 30 – Elementos versus modalidades de interação 118
Quadro 31 – Representação ordenada por significados abstratos 119
Quadro 32 – Participantes 125
Quadro 33 – ituações-problema do campo multiplicativo 125
Quadro 34 – Elementos na visualização de um número marcado com um quadrado 127
Quadro 35 – Elementos presentes na visualização do quadrado em cima do texto . . 127
Quadro 36 – Elementos presentes na visualização do quadrado em cima do texto . . 128

Quadro 37 – Elementos na escolha da multiplicação 128
Quadro 38 – Elementos na escolha da divisão por partes 129
Quadro 39 – Elementos na escolha da divisão por cotas 129
Quadro 40 – Elementos na visualização do diagrama 130
Quadro 41 – Elementos na visualização da interrogação 130
Quadro 42 – Impressões sobre diagrama 131
Quadro 43 – Principais ideias matemáticas 131
Quadro 44 – Avaliação do Software e impressões gerais 132
Quadro 45 – Lembranças do primeiro contato 132
Quadro 46 – Explicações antes e depois da vivência 133
Quadro 47 – Maneiras de manipulação dos elementos 136
Quadro 48 – Elementos da representação X modalidade de Interação 139
Quadro 49 – Situações-problema do campo aditivo 146

Lista de abreviaturas e siglas

VMR: Visual Mathematical Representations

RDCM: Manipulação Direta de Conceitos Reflexiva

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 1
1.1 Estruturas Aditivas . . . 3
1.2 Situações multiplicativas simples:Multiplicação, Divisão por partes, Divisão por cotas . . . 4
1.3 Operação aritmética, formato aritmético e mudança conceitual . . . 5
1.4 Representação . . . 6
1.4.1 Expressões da Representação . . . 6
1.4.2 Interação entre usuário e computadores . . . 7
1.4.3 Modalidades de interação em representações visuais . . . 8
1.4.3.1 Interações Básicas . . . 9
1.4.3.2 Conversação . . . 9
1.4.3.3 Manipulação Direta . . . 10
1.4.3.4 Navegação . . . 13
1.4.3.5 Interações Baseadas em Tarefas . . . 14
1.4.3.6 *Repicturing* . . . 21
1.5 A interface educativa: Gerard . . . 24
1.6 Perguntas da Pesquisa . . . 26
1.7 Justificativa . . . 26
1.8 Objetivos . . . 27
1.8.1 Objetivo Geral . . . 27
1.8.2 Objetivos Específicos . . . 27
1.9 Contribuições . . . 28
1.10 Organização . . . 29

2 REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . 30
2.1 A atividade científica . . . 31
2.1.1 Modelagem Matemática e Representação . . . 31
2.1.2 Representações como mediadoras da aprendizagem de conceitos específicos. 32
2.2 Influências da cultura na aprendizagem matemática . . . 33
2.3 A Representação de Vergnaud . . . 33
2.4 Conceitualização ou construção do conceito . . . 36

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS . . . 38
3.1 Materiais . . . 38
3.1.1 Qualrus . . . 38
3.2 Procedimentos Éticos . . . 42

3.3 Delineamento da pesquisa **44**
3.3.1 Fluxograma da metodologia 45
3.3.2 Processo de seleção da amostra 46
3.3.3 Coleta dos dados 47
3.3.3.1 Dados Visuais 48
3.4 Procedimento **49**
3.5 Experimento **49**
3.5.0.1 No início 50
3.5.0.2 Durante 50
3.5.0.3 No final de cada situação-problema 50
3.5.0.4 No final do experimento 51
3.5.1 Método de análise 51
3.6 Resultados **52**
3.6.1 Unidade de Análise 53

4 EXPRESSÕES DA REPRESENTAÇÃO UTILIZADAS PARA APOIAR O ENSINO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS 55
4.1 Introdução **55**
4.1.1 Representações visuais sobre matemática 56
4.1.2 Estruturas Aditivas e Multiplicativas 57
4.1.3 Situações multiplicativas simples: multiplicação, divisão por partes, divisão por cotas 58
4.2 Metodologia **59**
4.3 Resultados **59**
4.3.1 Conceitos presentes nas Estruturas Aditivas 60
4.3.2 Conceito de número, contagem e medida 60
4.3.3 Números decimais 63
4.3.4 Conceito de Comparação de Medidas 64
4.3.5 Conceito de Composição de medidas 66
4.3.6 Conceito de Transformação de Medidas 67
4.3.7 Conceitos presentes nas Estruturas Multiplicativas 70
4.4 Discussão **71**
4.5 Conclusão **73**

5 REPRESENTAÇÕES VISUAIS, MODALIDADES DE INTERAÇÃO E ENSINO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS. 74
5.1 Introdução **74**
5.1.1 Representações visuais de Matemática e suas modalidades de interação . . 74
5.1.1.1 Interações Básicas 74
5.1.1.2 Interações Baseadas em Tarefas 75

5.1.1.3 *Repicturing* . . . 77
5.1.2 Estruturas Aditivas . . . 78
5.1.3 O Gerard . . . 80
5.2 Delineamento da pesquisa . . . 81
5.2.1 Pergunta de pesquisa . . . 82
5.2.2 Objetivos . . . 82
5.2.3 Análise Qualitativa dos dados . . . 82
5.2.4 Participantes . . . 83
5.3 Materiais . . . 84
5.4 Métodologia . . . 85
5.5 Experimento . . . 85
5.6 Resultados . . . 86
5.6.1 Retirada gradativa da ajuda . . . 94
5.6.2 Elemento mais significativo . . . 96
5.7 Discussão . . . 98
5.7.1 Influências da manipulação na percepção dos elementos constitutivos da representação . . . 99
5.7.2 Elemento mais significativo e a influencia da escolaridade . . . 100
5.7.3 Tarefas com e sem ajuda . . . 101
5.7.4 Tarefas com ajuda se torna mais difícil . . . 101
5.7.4.1 Retirada gradativa das formas e cores . . . 103
5.8 Conclusão . . . 103

6 A CONCEITUALIZAÇÃO SOBRE SOMA E SUBTRAÇÃO NO USO DE REPRESENTAÇÕES DIAGRAMÁTICAS EM UMA INTERFACE EDUCATIVA. . . . 104
6.1 Introdução . . . 104
6.2 O Gerard . . . 104
6.2.1 Objetivos . . . 106
6.3 Métodologia . . . 106
6.4 Participantes . . . 106
6.5 Procedimento . . . 107
6.6 Experimento . . . 108
6.7 Resultados . . . 109
6.7.0.1 Exposição aos conceitos . . . 110
6.7.1 Significados . . . 111
6.7.1.1 Diagrama vazio . . . 111
6.7.1.2 Diagrama preenchido . . . 112
6.7.1.3 Principais ideias matemáticas . . . 114
6.7.2 A Conceitualização ou Mudança conceitual . . . 116

6.8 Discussão **116**
6.8.1 Habilidades metacognitivas e consciência meta conceitual 117
6.8.2 Elementos da representação visual e o desenvolvimento a um apropriado modelo conceitual. 117
6.9 Conclusão **118**

7 MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO POR PARTES OU DIVISÃO POR COTAS: COMO A CONSTRUÇÃO DE DIAGRAMAS INFLUENCIA NA SIGNIFICAÇÃO SOBRE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS . **120**
7.1 Multiplicação **120**
7.1.1 Divisão por partes 121
7.1.2 Divisão por cotas 121
7.2 Objetivo **123**
7.3 Método **123**
7.4 Participantes **123**
7.5 Procedimento **126**
7.6 Experimento **126**
7.7 Resultados **127**
7.7.1 Significados dos elementos. 127
7.7.2 Mudança conceitual 133
7.8 Discussão **134**
7.8.1 Influência dos diagramas na formação de professores 134
7.8.2 Elementos da representação visual que proporcionaram o desenvolvimento a um apropriado modelo conceitual. 135
7.9 Conclusão **137**

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS **138**
8.1 Presença de elementos significativos **138**
8.2 A influência da flexibilidade oferecida pelo ambiente notacional. . . **140**
8.3 Desdobramentos da Tese **141**
8.4 A influência da constância dos estudos e da prática. **142**
8.5 Limitações da Tese **142**
8.6 Impressões não evidenciadas nos dados. **142**
8.6.1 O ponto de partida das ações pode diminuir o espaço de busca. 143
8.6.2 Influência da manipulação nos gestos das participantes 143
8.6.3 Tarefa com indicadores se torna mais difícil 144
8.6.4 Ações semanticamente guiadas pelo texto e pela construção do diagrama. . 145

REFERÊNCIAS **148**

APÊNDICE A – ANUÊNCIA DAS ENTIDADES PARCEIRAS . . . **155**

APÊNDICE B – EXEMPLO DE PROVA APLICADA NAS ESCOLAS 156

APÊNDICE C – EXEMPLO DE PROVA APLICADA AOS ALUNOS 157

APÊNDICE D – CERTIFICADO DE AUTORIZAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA 158

ANEXO A – EXEMPLOS DE COMPONENTES EM PAPEL . . . 159

ANEXO B – FORMULARIO DE CONSENTIMENTO DO PARTICIPANTES 160

ANEXO C – ENTREVISTA APÓS A RESOLUÇÃO DE PROBLEMA 165

ANEXO D – ENTREVISTAS REALIZADAS APÓS TAREFAS . . 167

ANEXO E – ENTREVISTA APÓS A RESOLUÇÃO DE PROBLEMA, MODIFICADA APÓS O PILOTO. 170

ANEXO F – SUGESTÕES FEITAS PELO OBSERVADOR DURANTE O PROJETO PILOTO 174

1 INTRODUÇÃO

Resultados de exames nacionais mostraram que 59% dos alunos brasileiros chegam à 4ª série do Ensino Fundamental sem desenvolverem competências e habilidades elementares de leitura e 52% desses mesmos alunos demonstram deficiências em Matemática. O Nordeste apresenta 69% dos estudantes em situação crítica e muito crítica, o que contribui para aumentar as desigualdades regionais (TEIXEIRA, 2003). Por esse motivo e segundo Araújo e Luzio (2004), a formação continuada de professores, dentre outras iniciativas, tornou-se essencial para o enfrentamento dessa problemática, pois.

> O professor em formação deve coletar informações sobre os alunos, analisá-las, e, em seguida, delinear projetos de ação pedagógica desde os primeiros momentos de sua formação.(ACIOLY-RéGNER; BRITO; SPINILLO, 2008, pg-5).

.

Além disso, Ibid. lembram que a

> profissionalização de professores não cabe num pequeno conjunto de competências técnicas facilmente abordadas, mas representa todo um repertório de esquemas que dizem respeito igualmente à interação com outros, à comunicação, à linguagem e à afetividade ACIOLY-RéGNER; BRITO; SPINILLO, op. cit., pg-02.

.

Portanto, a habilidade para desenvolver projetos de ação pedagógica só é desenvolvida à medida que professores se envolvam com experiências de ensino e aprendizagem que tenham cunho prático operacional e cujos resultados sejam observáveis. Vê-se, portanto, que a aprendizagem de conceitos matemáticos do Ensino Fundamental I, tornou-se um ponto de grande obstáculo ao longo da formação básica, pois a Matemática é considerada uma das disciplinas mais difíceis, e isso se deve em parte, a sua representação abstrata cujos símbolos não fazem sentido para os alunos, pelo menos, não da forma como se apresentam(HELLMEISTER; DRUCK et al., 2004). Em suas palavras, os autores apontam que,

> apesar de permear praticamente todas as áreas de conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes, parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados HELLMEISTER; DRUCK et al., op. cit., pg-2.

.

Esse fato vem acompanhado de conotações negativas para alunos com falta de habilidade ou baixo desempenho em Matemática uma vez que, regularmente, tais características são associadas à inteligência inferior e, costumeiramente, relacionadas com deficiência de aprendizagem e, por conseguinte, deficiência de inteligência (ARAÚJO; LUZIO, 2004). Nesse sentido, a Matemática é apenas um exemplo, mas facilidades para adquirir conhecimento formal ou facilidades em usar recursos intelectuais, valorizados pela escola, são comumente relacionadas à existência de intelecto privilegiado. Contrariamente, a ausência de tais características é relacionada à presença de intelecto comum(CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1982).

Muitas questões permeiam os resultados mostrados por ARAÚJO; LUZIO, op. cit. sobre a educação básica brasileira. Sabe-se que aspectos de natureza psicossocial relacionados às condições de trabalho, à formação do professor, às políticas públicas que definem os recursos para serem empregados na educação básica, bem como fatores de estresse vinculados ao ambiente da cidade, do bairro, da escola e da sala de aula geram tensões influenciadoras e restritivas da atuação do professor(ANSER; JOLY; VENDRAMINI, 2003; RISTUM; BASTOS, 2004). Portanto, utilizar métodos e materiais adequados que favoreçam a formação desse profissional, apresenta-se como uma das alternativas para desenvolver habilidades, as quais facilitam a transposição de conhecimentos teóricos adquiridos para condutas práticas na sala de aula.

Os conceitos matemáticos ensinados durante o Ensino Fundamental versam, dentre outras coisas, sobre as quatro operações matemáticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Nesse contexto, cada conteúdo é associado à determinada simbologia que, assim como as operações que representam, ainda são pouco conhecidos dos alunos(HELLMEISTER; DRUCK et al., 2004). Por esse motivo, variadas situações-problemas são construídas envolvendo elementos do cotidiano das crianças tais como: carrinhos, bolinhas, brinquedos, fichas e etc. Em razão disso, estima-se que resolver situações, contendo tais elementos, contribua não só para tornar os conteúdos mais acessíveis, mas também ajudem a divulgar os simbolismos matemáticos utilizados.

No que diz respeito à avaliação de resultados, ou seja, da aprendizagem de conceitos potencialmente percebida nos alunos, parece existirem diferenças entre discurso e prática. Ou seja, respostas categorizadas como certas ou erradas são usadas como indicadores de aprendizagem; entretanto, respostas dessa natureza não oferecem visibilidade sobre os motivos que conduziram aos erros ou aos acertos. Sendo assim, para entender tais motivos numa perspectiva construtivista, nesta pesquisa foi adotada a categorização de situações-problemas sobre soma, subtração, multiplicação e divisão como proposta por (GÉRARD, 1998; VERGNAUD, 1986). Na proposta desse autor, as Estruturas Aditivas agrupam as operações de soma e subtração, já as Estruturas Multiplicativas agrupam as

operações de multiplicação e divisão.

1.1 Estruturas Aditivas

Em Magina e al. (2001) encontramos quatro exemplos de problemas matemáticos apresentados no Ensino Fundamental nas séries iniciais:

1. Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas 4 garotos e 7 garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa?
2. Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?
3. Carlos tem 4 anos. Maria é 7 anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria?
4. Roberto foi jogar vídeo game. Ao fim da primeira fase do jogo ele tinha perdido 4 pontos. Ele, então, foi para a segunda e última fase do jogo. Ele terminou o jogo com 7 pontos ganhos. O que aconteceu na segunda fase?

Magina e al. (2001) analisam os problemas 1, 2, 3, 4 e concluem que embora o processo de resolução varie na sua forma esquemática e interpretativa, sua conclusão se dá com a execução de uma mesma operação: $4 + 7$. Logo, para que situações-problema, como acima exemplificadas, sejam resolvidas é necessário, tão somente, operar os números 7(sete) e 4(quatro) utilizando a operação de soma cujo operador é o (+). Entretanto, embora o cálculo numérico seja o mesmo para os quatro exemplos acima, relações, potencialmente existentes, entre as quantidades são diferentes e, sendo assim, interpretar corretamente cada situação-problema carece de uma análise detalhada da relações existentes. Com isso, as autoras mostram que resolver tais situações envolve esquematização e interpretação e, além disso, depende da forma como tais situações são propostas. Essas observações fazem lembrar a recorrente pergunta:

- Professor, a continha é de mais ou de menos?

Essa pergunta indica que os motivos para a escolha das operações de soma ou de subtração são desconhecidos e, além disso, tal desconhecimento decorre da ausência de compreensão esquemática e interpretativa sobre as situações-problema, permeado por competências voltadas para leitura e interpretação de texto (ARAÚJO; LUZIO, 2004) .

Além das relações qualitativas mostradas nos exemplos 1, 2, 3, 4, Magina e al. (2001) indicam os conceitos matemáticos contidos nas situações. Por exemplo:

1. Conceito de medida (magnitude onze é maior que sete, que é maior do que quatro);

2. Conceito de adição;
3. Conceito de subtração;
4. Conceito de transformação de tempo (por exemplo, “Maria possuía agora...” quanto tinha antes?...);
5. Relação de comparação (por exemplo, “quem tem (é) mais, quem tem é) menos?”, “quanto tem a mais, quanto tem a menos?”) e
6. Composição de quantidade.

A seguir, apresentamos as Estruturas Multiplicativas Simples.

1.2 Situações multiplicativas simples:Multiplicação, Divisão por partes, Divisão por cotas

Um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos?

Multiplicação: nesse contexto, desconhece-se o valor total e conhece-se o número de partes e o valor de cada parte. Nesse caso, o valor total é encontrado multiplicando-se o número de partes pelo valor de cada parte.

Para fazer sete bolos, são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos têm a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo?

Divisão por partes: desconhece-se o valor de cada parte e conhece-se o valor total e o número de partes. Nesse caso, o valor de cada parte é encontrado dividindo-se o valor total pelo número de partes.

Quantos bolos podem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos?

Divisão por cotas: desconhece-se o número de partes e conhece-se o valor total e o valor de cada parte. Nesse caso, o número de partes é encontrado dividindo-se o valor total pelo valor da cada parte.

Para resolver situações-problema estruturas aditivas e multiplicativas, ou seja, soma subtração, multiplicação e divisão é necessário, portanto, além de criatividade, utilizar toda uma sorte de materiais tangíveis, tais como: bolinhas, brinquedos e tampinhas, ou seja, elementos cujas relações entre eles possam ser observadas, evidenciando, por conseguinte, não apenas os números, representativos de quantidades e relações, mas também o modelo qualitativo envolvido no problema proposto. Segundo Vergnaud (1986), em situações-problema, como acima exemplificadas, são requeridos raciocínios qualitativos bem distintos, logo a presença de elementos tais como: carrinhos, bolinhas ou tampinhas,

que são elementos diretamente observáveis, contribui para perceberem-se as relações entre os objetos presentes na situação-problema e, além disso, para, não só inferir a operação matemática resultante, mas também oferecer interpretações para uma possível solução. A essa variedade de situações que requerem conhecimentos diferentes e mobilizam raciocínios diferentes,Vergnaud (1986) denomina de **Campo Conceitual**, e nesse caso, **Campo Conceitual Aditivo** e **Campo Conceitual Multiplicativo**, por se tratar de problemas que envolvem **soma**, **subtração**, **multiplicação** e **divisão**. Para esse autor,

> um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexãoVERGNAUD, op. cit., pg-84.

.

1.3 Operação aritmética, formato aritmético e mudança conceitual

Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?

1. O formato aritmético seria: ? - 4 = 7;
2. A operação aritmética, entretanto, é 7 + 4 = 11.

Selter et al. (2012) distinguem os conceitos de: f**ormato aritmético** 1 e **operação aritmética** 2. Em 1, os autores mostram o formato que tal operação pode assumir e em2, mostram a operação aritmética realizada para obter o resultado da situação-problema. Esse exemplo explicita a inversão existente entre as operações soma e subtração, que, segundo Prediger (2008), Selter et al. (2012), Vergnaud (1986), Gérard (1998), só é percebida, por meio de uma mudança conceitual cujas bases estão na teoria construtivista de aprendizagem inspirada pela noção de acomodação proposta por Piaget (PREDIGER, 2008). Nesse sentido, Ibid. enfatiza que na mudança conceitual deva haver a presença da reconstrução do conhecimento anterior, quando este é confrontado com novas experiências e mudanças PREDIGER, op. cit.. Tal confronto favorece, por conseguinte, a identificação de possíveis incompatibilidades entre o conhecimento anterior e os novos conhecimentos em processo de aquisição(GÉRARD, 1998). Ou seja, a exposição dos aprendizes a resolução de variadas situação-problema irá favorecer o confronto, que, por seu turno, possibilitará a identificação de possíveis conflitos existentes entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos. Neste contexto, tal confronto é favorecido pelo uso de expressões da representação (SELTER et al., 2012), as quais assumem o importante papel, não só como facilitadoras na propagação do conhecimento humano, mas também como influenciadoras da

aprendizagem de conceitos(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007; GOLDIN; KAPUT, 1996; KAPUT, 1994; MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004; SEDIG; SUMNER, 2006; SELVA; FALCAO; NUNES, 2005; GÉRARD, 1998; WESSELS, 2006).

1.4 Representação

Conhecimentos, experiências, e tudo o que os seres humanos descobrem e querem compartilhar necessita de um meio de expressão, para que, dessa forma, a informação contextualizada e registrada seja compartilhada com outros em situações e tempos diferentes. Nesse sentido, a escrita humana, além de possibilitar o registro dos acontecimentos em diversas épocas diferentes da história, deu início a um processo de abertura e acesso a conhecimentos para diversos segmentos da sociedade. Escrever e ler, inicialmente um privilégio de poucos, foi ao longo da história humana, tornando-se cada vez mais acessível, possibilitando a disseminação de conhecimentos por meio da linguagem escrita e o nascimento dos processos educativos formais. Sendo assim, a escrita é uma ferramenta usada para representar conhecimentos acumulados; entretanto, não só a escrita, mas todos os símbolos, utilizados na comunicação, entre os seres humanos e o mundo que o cerca, são vias, por meio das quais, podem ser disponibilizadas informações contextuais. Segundo Gérard (1998), Representação é um conceito difícil,

> entretanto existem duas razões simples para considerá-la como assunto para estudos científicos: a primeira, todas as representações de experiências humanas podem ser vistas como um fluxo de imagens internas, gestos e palavras; a segunda, é que as palavras e símbolos são utilizados para comunicar sem, contudo, referir-se diretamente à realidade, mas a uma representação dela GÉRARD, op. cit., pg-167, tradução nossa.

Assim como em outras áreas do conhecimento, a matemática beneficiou-se de um variado conjunto de símbolos usados para representar quantidades, relações e outros conceitos. Segundo Kaput, Noss e Hoyles (2002), símbolos têm função facilitadora de acesso ao conhecimento, pois são vias, por meio das quais, conhecimentos matemáticos, acumulados ao longo dos anos, são transmitidos, compartilhados e ensinados. Por esse motivo, são amplamente utilizados nas atividades voltadas para ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007; GAGATSIS; ELIA, 2005; GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; HARRIES; BARMBY, 2007; HARRIES; SUGGATE, 2006; LAUTERT; SPINILLO, 2002; SELVA; FALCAO; NUNES, 2005). Entretanto, cabe pontuar que representações são elementos restritivos. Por exemplo, o Cálculo, segundo Kaput, Noss e Hoyles (2002), foi desenvolvido sob representações algébricas e, por conseguinte, seu desenvolvimento esteve na dependência do que a álgebra podia representar.

1.4.1 Expressões da Representação

Expressões da representação estão inseridas num contexto mais amplo denominado por Goldin, (1998a) como

> sistemas de representação externa, os quais incluem os símbolos falados, escritos, figuras estáticas, modelos manipulados bem como as situações do mundo real Ibid., pg-143, tradução nossa.

Nessa mesma linha, (SEDIG; SUMNER, 2006, pg-143) tradução nossa dizem que uma representação visual é

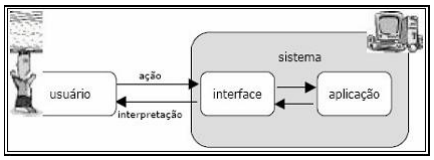
> uma coleção de gráficos e símbolos que, visualmente, codificam propriedades: funcionais, causais, estruturais e semânticas, além dos relacionamentos presentes no mundo. Seja esse, um mundo concreto, ou um mundo abstrato SEDIG; SUMNER, op. cit., pg-143 tradução nossa.

Continuando a discussão, tanto Gérard (1998) quanto Kaput, Noss e Hoyles (2002) analisam as expressões da representação em associação com ações, ou seja, são os atos de interpretação oferecidos por um intérprete balizados nos seus conhecimentos prévios, que tornam possível a existência da representação. Em outras palavras, sem a interpretação oferecida por um intérprete, não existe representação(KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002). Por outro lado, Goldin (1998a) não se restringe a existência de um sistema de representação, exclusivamente, para situações nas quais o homem estabelece as estruturas ou relações simbólicas. Por exemplo, Ibid. mostra que moléculas de DNA possuem estrutura semântica que codificam aminoácidos, sem, no entanto, necessitar da interpretação humana para isso, deixando claro, entretanto, que descrever esses fenômenos faz parte da atividade científica humana.

1.4.2 Interação entre usuário e computadores

As interfaces de usuário atuam como meios de comunicação entre sistemas computacionais e seres humanos. Por esse motivo, tanto podem ser meios para interação entre usuário e sistema quanto ferramentas que oferecem instrumentos para processos comunicativos (SOUZA et al., 1999). Logo, o processo comunicativo, como mostrado na figura 1, "*engloba tanto as ações do usuário sobre a interface de um sistema quanto suas interpretações sobre as respostas reveladas por esta interface*"SOUZA et al., op. cit., pg-4.

Figura 1 – Interação entre o usuário e computador



Fonte: (SOUZA et al., 1999)

Como mostrado na figura 1, ao executar ações no computador, o usuário vê mudanças na interface e em seguida, pode oferecer interpretações, as quais são influenciadas no uso de modalidades de interação.

1.4.3 Modalidades de interação em representações visuais

Sedig e Sumner (2006) fizeram um estudo analisar diversas modalidades de interação, potencialmente utilizadas, em ferramentas desenvolvidas para ensinar Matemática, ou *Mathematical Cognitve Tools*. Tais ferramentas fazem uso de representações visuais de matemática, conhecidas na literatura como VMR – *Visual Mathematical Representations*. Segundo os mesmos autores, VMR – *Visual Mathematical Representations* são extensivamente usadas na área da educação matemática para facilitar a compreensão dos conteúdos. Isso acontece tanto em interfaces computacionais quanto em sala de aula, quando professores experientes lançam mão de desenhos, imagens e outras formas metafóricas que, na perspectiva deles, possam contribuir na compreensão dos conteúdos ensinados. Por exemplo:

> gráficos (topológicos, funcionais e estatísticos), padrões visuais, estruturas geométricas, diagramas e representações de conceitos abstratos, tais como frações, operações e contagem são utilizadas em diferentes disciplinas com diferentes níveis de complexidade (SEDIG; SUMNER, 2006, pg-02) tradução nossa.

Apesar do inicial direcionamento para ferramentas matemáticas, Sedig e Sumner (2006) abordaram, mais amplamente, tanto as expressões da representação quanto suas modalidades de interação, ou seja, eles identificaram diferentes técnicas de interação existentes que, embora utilizadas em outros domínios, apresentam um uso frutífero no domínio das *Mathematical Cognitive Tools*. Nesse esforço preliminar, Sedig e Sumner (2006), além de oferecerem modalidades de interação, buscaram, amplamente, mostrar seu papel fundamental na explicitação de conceitos matemáticos. O princípio norteador da categorização foi, portanto, observar possibilidades de interação potencialmente oferecidas por diversas representações e cujo uso fosse frutífero para ensinar matemática.

Esse olhar se justifica no fato de que, assim como o conceito por ela representado, VMRs apresentam propriedades cuja manipulação pode fazer perceber contiguidade entre as propriedades da VMR e as propriedades dos conceitos metaforicamente representados (DE-SOUZA; SEDIG, 2001; HARRIES; BARMBY, 2007; GÉRARD, 1998). Logo, ajustando melhor o foco de análise, os autores debruçam seu olhar, especificamente na presença de elementos da representação, os quais possam ser manipulados pelo usuário, observando além disso, a maneira como ocorre tal manipulação. Ou seja, usar o mouse para tocar nas representações, girá-las, observá-las sob diversos ângulos e assim, aproxima-se da representação, irá, por conseguinte, proporcionar aproximação aos conceitos por elas representados.(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; SUMNER, 2006). Nesse contexto, Sedig e Sumner (2006) posicionam as modalidades de interação como mediadora entre usuários e VMRs,

> podendo estas serem utilizadas para suportar atividades de organização, comparação, modelização, visualização e interpretação – envolvidas em atividades de investigação e exploração de objetos matemáticos SEDIG; SUMNER, op. cit., pg-2, tradução nossa.

Logo as modalidades de interação podem:

- Apoiar a investigação exploratória para favorecer a descoberta de ideias decorrentes de raciocínios intuitivos e qualitativos antes que os aprendizes adentrem pelos conceitos formais;

- Guiar e transformar caminhos de raciocínio e compreensão;

- Construir e reconstruir informações visuais que favoreçam a percepção de processos interativos e evolutivos;

- Distribuir cargas de processamento da informação, potencialmente presentes, em representações visuais;

- Favorecer reflexões com base em padrões observados;

- Coordenar representações visuais com os modelos mentais dos aprendizes.

Sendo assim, os mesmos autores oferecem resultados preliminares que categorizam a interação segundo as seguintes denominações: (1) Interações básicas; (2) Interações baseadas em tarefa; (3) Repicturing; (4) Combinação de interações baseadas em tarefas.

1.4.3.1 Interações Básicas

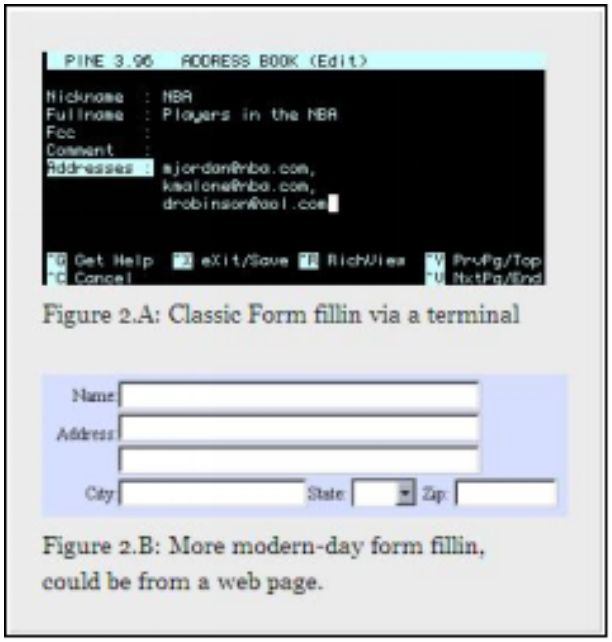
Interações Básicas são compostas pela metáfora da Conversação entre seres humanos, pela manipulação direta e pela navegação. A figura 2, a seguir, mostra um exemplo de conversação usando comandos escritos em linguagem de programação, ou preenchimento de formulário

1.4.3.2 Conversação

Na Figura 2, os campos: nome, endereço, cidade, etc são preenchidos e essa metáfora é usada para simular uma conversação, ou seja, no campo texto está implícita a pergunta "Qual é o seu nome?"

Entretanto, na figura 2 não existem restrições quanto aos elementos digitados durante o preenchimento dos campos e , portanto, os erros não são importantes nessas situações. Já a Figura 3 mostra um exemplo no qual existem regras de preenchimento e, caso essas não sejam obedecidas, acarretará em erro de preenchimento. Ou seja, existem situações nas quais errar o preenchimento provoca uma discrepância entre o pretendido e o ocorrido, a qual é denotada por algum tipo de aviso. Como pode ser visto, o formulário da

Figura 2 – Modalidade de interação do tipo conversação



Fonte: (SOEGAARD, 2010)

Figura 3 – Preenchimento de formulário com verificação de erro

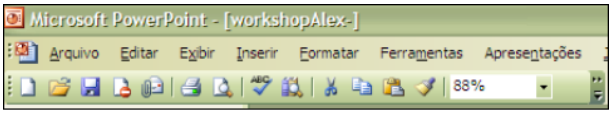
Fonte: (WOLFRAM, 2010)

figura 3 é preenchido com uma expressão usada para, considerando o intervalo de definição da função, mostrar dois gráficos na tela. Ou seja, diferentemente da figura 2, caso um erro seja cometido, a ferramenta não imprimirá os gráficos corretamente, pois a verificação do erro ocorre assim que o preenchimento do formulário é finalizado com a tecla "*enter*". Por esse motivo, é necessário pensar sobre o formato do preenchimento e, consequentemente, sobre as regras matemáticas da operação. Nessas ocasiões o preenchimento é analisado na perspectiva de evitar que erros se originem da discrepância existente entre aquilo que foi projetado e aquilo que foi mostrado.

1.4.3.3 Manipulação Direta

O termo Manipulação Direta foi criado para denominar interações nas quais não existem intermediários, ou seja, não é necessário escrever nenhum comando na tela, basta

Figura 4 – Modalidade de Manipulação Direta



Fonte: Microsoft PowerPoint

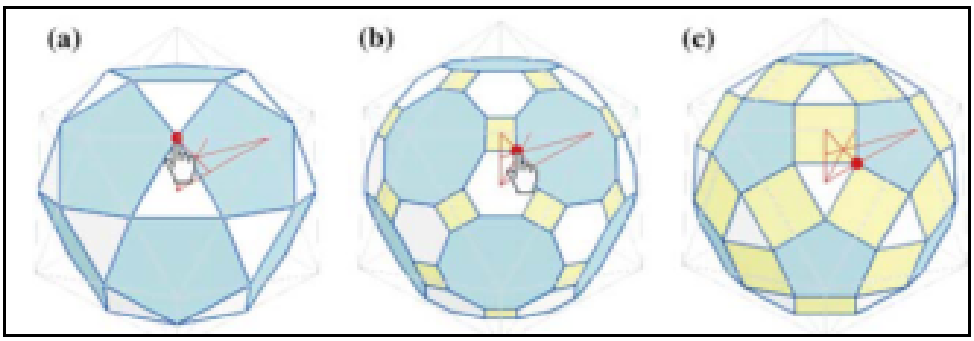
posicionar o mouse sobre o objeto de interesse e manipulá-lo. Segundo Shneiderman (1998), tal manipulação pode ocorrer por meio de seis protocolos de mouse ou seis formas de interação com a interface:

- **Selecionar**, um item é escolhido a partir de um conjunto de itens;
- **Posicionar**, o mouse é posicionado em um ponto em um espaço de uma ou mais dimensões;
- **Orientar**: um ponto é escolhido em um espaço de duas ou mais dimensões;
- **Quantificar**: um valor numérico é especificado;
- **Caminho**: tarefas de posicionar e orientar são realizadas sequencialmente;
- **Texto**: textos em um espaço de duas dimensões são modificados, movidos e editados. A seguir, a Figura 44 apresenta um exemplo da manipulação direta.

Como visto na Figura 4, cada elemento representa um objeto ou uma ação. Por exemplo, o disquete representa a ação de salvar, a tesoura, de cortar. Não há, portanto, dependência entre comandos escritos e execução de ações. Ou seja, por meio do mouse, o usuário interage com os elementos dispostos no campo visual e, em seguida, a interface gera e mostra o próximo estado. A seguir, a figura 5 apresenta mais um exemplo de manipulação direta.

Como exemplificado na figura 5, o mouse é posicionado sobre o ponto vermelho e, em seguida, movimentado. Como consequência desse movimento, a interface transforma o icosidodecahedron da figura 5 (a) (poliedro com vinte faces triangulares, doze faces pentagonais, 30 vértices idênticos e 60 arestas idênticas no rhombicosidodecahedron da figura 5 (c). (Na geometria, o rhombicosidodecahedron, ou rhombicosidodecahedron, é constituído por dois ou mais tipos de faces de polígonos regulares). Como visto nas figura 4 e 5, a metáfora de **Manipulação Direta** é uma forma "tangível" de interação que simula o toque de mãos sobre o objeto. É possível **Selecionar**; **Arrastar**; **Mover**; **Modificar** a forma (*Morphing*) objetos na interface. Ou seja, a manipulação direta reduz o esforço

Figura 5 – modificação do icosidodecahedron para (a) rhombicosidodecahedron (c)



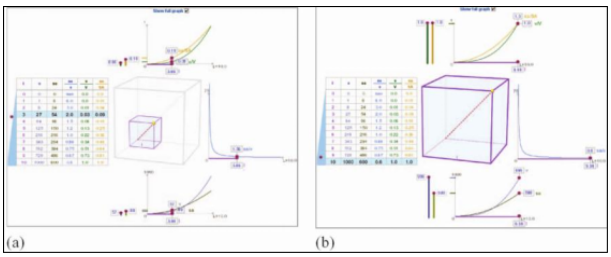
Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

cognitivo despendido na ação permitindo que se estabeleça a sensação de engajamento direto entre usuários e os objetos presentes na interface(SHNEIDERMAN, 1987). Segundo o mesmo autor, tal engajamento é proporcionado pelo estilo de interação e por existirem:

- **Objetos de interesse representados na interface:** na manipulação direta, cada ação ou objeto de interesse é representado por uma imagem na tela, por exemplo, o disquete representa salvar, a tesoura, cortar.
- **Ações incrementais com imediato feedback:** após a execução de cada ação, a interface modifica seu estado mostrando as consequências dessa ação. Dessa forma, à medida que novas ações vão sendo executadas, a interface mostrar seu modelo de interação, favorecendo que ele seja aprendido.
- **Execução de ações físicas**: a ação de cortar no Word é representada por uma tesoura e, à vista disso, escolher esse botão remete a ação física de cortar.
- **Botões pressionáveis ao invés de uma linguagem de comandos complexa**: não é necessário aprender um conjunto de comandos para operar na interface. Basta usar o mouse.
- **Rápida recuperação de erros**: uma vez cometido um erro, a ação realizada pode ser desfeita sem que haja ônus decorrente do erro cometido. Essa ausência de ônus pode, portanto, encorajar usuários a continuar executando novas ações.

Apesar dos benefícios acima elencados, essa opção representa ações e objetos ao invés de conceitos e, em razão disso, estimula nos usuários o desenvolvimento de uma expectativa ingênua sobre os conceitos que se deseja veicular na interação(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997). Em razão disso e, segundo Ibid. a manipulação direta de objetos não é apropriada para o uso em interfaces educativas, pois suas características facilitadores da manipulação vão de encontro aos objetivos voltados para aprendizagem de conceitos específicos.

Figura 6 – Efeitos da navegação são vistas em diferentes representações



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

1.4.3.4 Navegação

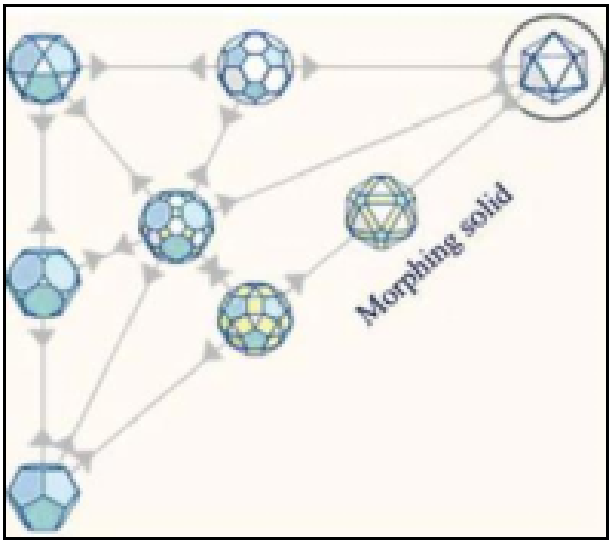
A metáfora de Navegação se refere a movimentar o cursor sobre ou através de VMRs – *Visual Mathematics Representations*. Dessa forma, são realizadas duas ações concomitantemente: *Traveling*(Viajar), que se refere a executar movimentos no espaço e *Wayfinding*(Encontrar o caminho) que se refere a identificar a posição atual do cursor sobre a representação e, a partir de tal posição, encontrar um caminho para atingir outro ponto da representação. Sendo assim, navegar é, portanto, um processo exploratório que permite compreender e classificar os objetos presentes no campo visual, não modifica a representação, favorecendo, portanto, a modelagem mental e a interpretação. A seguir a figura 6 apresenta os efeitos das ações presentes na navegação em diferentes representações.

Na figura 6 aparecem uma tabela, três gráficos e um sólido. Essa visão permite explorar relacionamentos existentes entre os lados do sólido, seu volume e sua área mostrando o sólido a partir de diferentes perspectiva. Essas representações complementam e apoiam uma a outra e são organizadas como redes semânticas(LIANG; SEDIG, 2009). Por exemplo, na figura 6 (a), os efeitos da interação sobre uma das cinco representações é refletido nas outras quatro podendo ser observado na figura 6(b) de diversas maneiras. Dessa forma, a navegação favorece, por conseguinte, o desenvolvimento de mapas cognitivos internos, os quais se referem a aquisição de três níveis de conhecimento: a definição de **Rotas**, **Marcas** e **Pesquisa**.(SEDIG; SUMNER, 2006).

- **Marcas**: é o conhecimento local de interesse, identificado como base para a construção do mapa.
- **Rotas**: é o conhecimento sobre a sequência de ações de navegação necessárias para atingir determinado ponto.
- **Pesquisa**: é o conhecimento sobre o layout da estrutura espacial, bem como sobre as relações entre os objetos locais e as rotas existentes no espaço.

Durante a atividade de navegação, os aprendizes adquirem, formam, mantém e corrigem o conhecimento de suas pesquisas (LIANG; SEDIG, 2009; SEDIG; SUMNER,

Figura 7 – Exemplo de Animação



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

2006). Sendo assim, a navegação, segundo Sedig e Sumner (2006), desde que em ambientes bem projetados, favorece a integração de conhecimentos por meio de várias rotas em uma rede de rotas, contribuindo, dessa forma, na criação de mapas cognitivos internos.

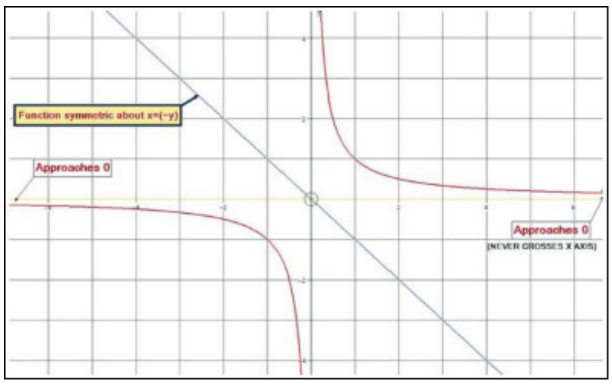
1.4.3.5 Interações Baseadas em Tarefas

As Interações Baseadas em Tarefas são compostas por: (a) **Animações**, (b) **Anotações**, (c) **Chunking**, (d) **Composição** e (e) **Filtragem**. **Interações Baseadas em Tarefas** (a) **Animações**: as animações se referem a interagir com a VMR para gerar movimento. Dentre os benefícios da animação está a visualização de processos transacionais, de transformações temporais, bem como a percepção da semântica. Por exemplo, na Figura 7, à medida que ocorre o movimento, a quantidade de lados do sólido vai sendo dinamicamente modificada

(a) **Animações**, como exemplificadas na figura 7, a depender da complexidade da VMR, podem ser unidimensionais ou multidimensionais. Elas possibilitam:

- Atrair e direcionar a atenção dos aprendizes para detalhes que estejam escondidos na representação;
- Visualizar, dinamicamente, processos transacionais;
- Suportar cognição externa, que se refere a como interagimos com representações externas (mapas, anotações e diagramas);
- Explicitar melhor as informações codificadas, pois facilitam a percepção da semântica, bem como a percepção das transformações temporais potencialmente visualizadas

Figura 8 – Anotações inseridas em uma função hiperbólica retangular



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

na VMR.

Os pontos negativos, entretanto, dizem respeito à característica transitória da animação, a qual pode impedir que todos os passos realizados sejam percebidos.

Interações Baseadas em Tarefas (b) **Anotações**: anotações se referem a inserir notas ou marcas sobre a VMR, como visto na Figura 8.

Anotações, como vistas na figura 8, são adicionadas ***highlighting***(destacando), **riscando**, **nomeando** e ou **colorindo** os pontos escolhidos. Podem estar sempre visíveis ou serem abertas sob demanda. Podem ser feitas automaticamente ou manualmente. Serem permanentes ou temporárias, ou seja, removidas mediante interesse do usuário para diminuir o ruído provocado pela sua presença. Favorecem tanto a inserção de metadados pessoais quanto a identificação de propriedades da representação. Sendo assim, as anotações ajudam a explicar determinada representação mostrando alguns de seus aspectos e proporcionando que, no aprendiz, nasçam perguntas tanto sobre a representação quanto sobre os conceitos por ela representados.

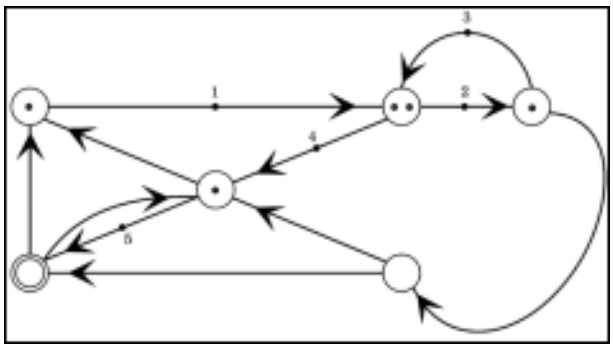
Diferentemente da figura 8 cujas anotações são realizadas manualmente, na figura 9, tais anotações não são controladas, são geradas automaticamente.

A figura 9, por exemplo, apresenta círculos e ligações entre eles, os círculos são denominados **nós** e suas ligações de **arestas**. Esse tipo de estrutura é denominada **grafo** e é usada para representar, por exemplo, cidades e conexões entre elas. Quando cada nó ou aresta é tocada com o mouse, a ferramenta, automaticamente, deixa marcas sobre os nós e sobre as arestas para indicar tanto os elementos visitados quanto a ordem de visitação dos nós. A figura 9 mostra, portanto, o caminho percorrido pelo aprendiz em um grafo.

As anotações são, portanto, marcas externas impressas sobre VMRs que:

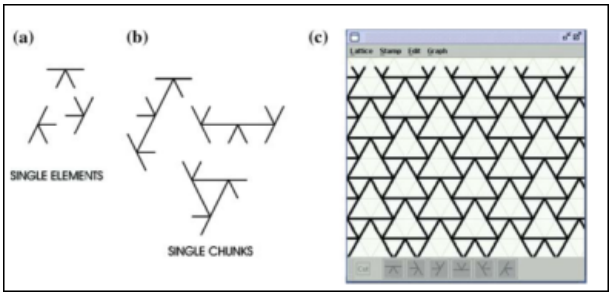
- Ajudam a desenvolver o raciocínio reduzindo as atividades mentais dos aprendizes

Figura 9 – Anotações automáticas para indicar o caminho percorrido



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 10 – Ks Chunking permite a construção de uma figura repetida K vezes



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

e favorecendo, por conseguinte, a compreensão e a reflexão tanto sobre as ações realizadas quanto sobre os conceitos representados.

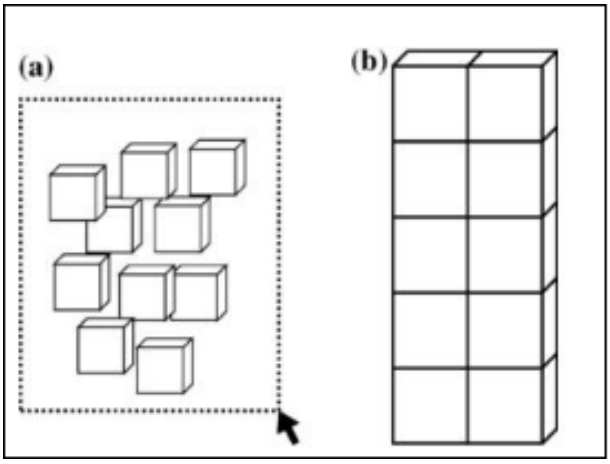
- Apoiam os objetivos, planos, percepção, memória e razão dos aprendizes.
- Facilitam a lembrança e a reflexão sobre ações passadas, apoiando assim, a busca de soluções para possíveis problemas.

Dentre os benefícios das anotações está a adição de metadados, que podem ser do tipo: (i) **elementos**, anotações inseridas em elementos dentro da VMR, do tipo (ii) **transformações temporais**, comentários anexados a VMRs durante um processo de mudança, e do tipo (iii) **relações causais**, explicações anexadas sobre determinado elemento interativo da VMR que apresente relacionamentos causais com outros elementos visuais.

Interações Baseadas em Tarefas (c) **Chunking**: ou cortar em pedaços grandes. Essa forma de interação parte do princípio de que, ao invés de interagir apenas com elementos atômicos, é possível interagir com grupos de elementos; ou seja, executar e interagir com agrupamentos criados com base em critérios de similaridade, um exemplo pode ser visto na Figura 10, a seguir.

A figura 10(c) apresenta um exemplo do uso de chunking. Cada K-estrutura pode

Figura 11 – Exemplo de agrupamento



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

ser formada por vários padrões menores de K-estruturas. No chunking, a figura 10c pode ser construída a partir de pedaços pequenos como os da figura 10a, ou a partir de pedaços maiores, como na figura 10b. Já o agrupamento, embora parecido com o chunking, o interesse, nesse caso, é construir a partir de pedaços com tamanho predefinidos. Por exemplo, a partir dos blocos da figura 11 (a) é formado o agrupamento da figura 11 (b). O bloco maior da figura 11 (b) foi composto pelos 10(dez) blocos menores da Figura 11 (a). Ele pode ser usado para realizar uma contagem de dez em dez. **Interações Baseadas em Tarefas** (d) **Composição**: compor cujas variantes são montar, juntar, ligar, conectar e construir é semelhante ao agrupamento, contundo o objetivo final é construir a VMR toda, ao invés de seus subcomponentes. Além disso, contrariamente ao caso da animação, que permite apenas a observação das ações, compor permite que haja participação dos aprendizes no processo de criação da VMR. A seguir, a figura 12 mostra um exemplo de composição.

A figura 12, mostra um círculo, um triângulo inscrito e, para cada lado do triângulo sua mediatriz. Qualquer vértice do triângulo pode ser manipulado e arrastado sobre o círculo. Dessa forma, compor oferece a oportunidade de confirmar, explorar e vivenciar conceitos matemáticos. A interatividade desses ambientes pode, portanto, favorecer a descoberta de novas provas fora do domínio da geometria euclidiana tradicional.(SEDIG; SUMNER, 2006)

Interações Baseadas em Tarefas (e) **Cortar**, Cortar cujas variantes são cultivar, truncar, poda e corte, refere-se a interagir com VMR para delimitar sua exposição identificando e removendo partes desnecessárias. Por exemplo, a imagem da figura 13 é composta por padrões repetitivos e, portanto, apenas uma parte da VMR é suficiente para compreender toda estrutura e, além disso é possível cortar uma parte, bem como selecionar elementos ou regiões para serem conservados.

Figura 12 – Composição de uma VMR por meio de menu

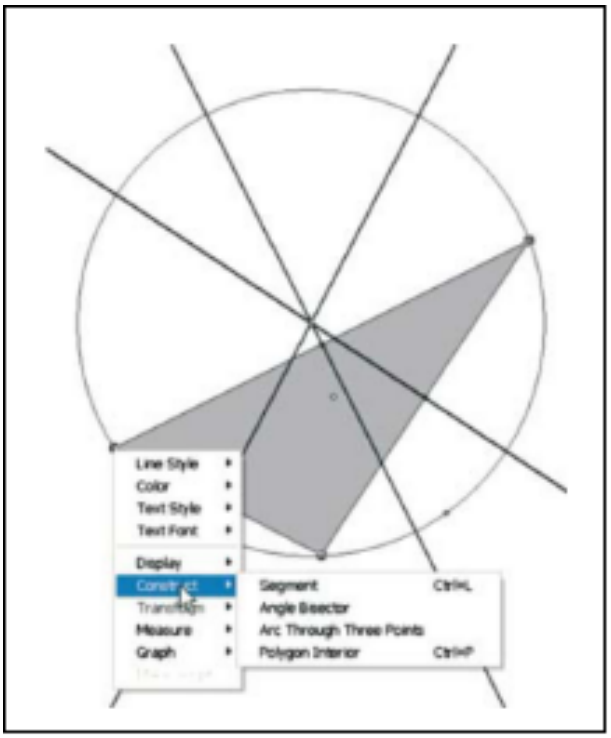
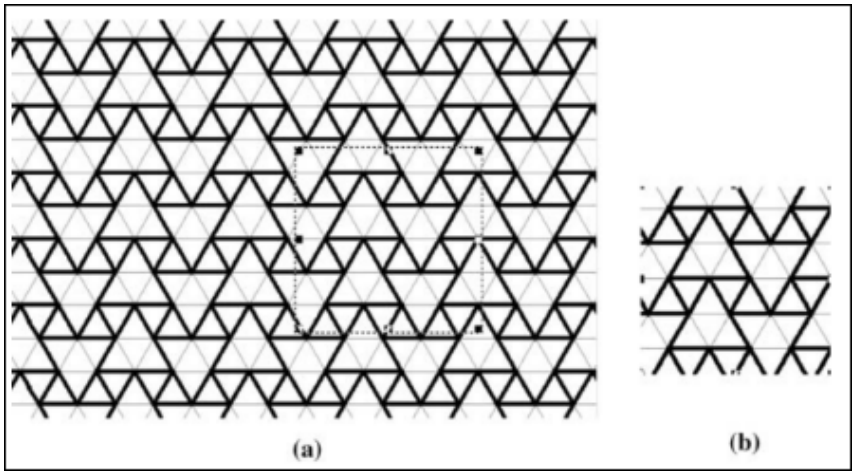
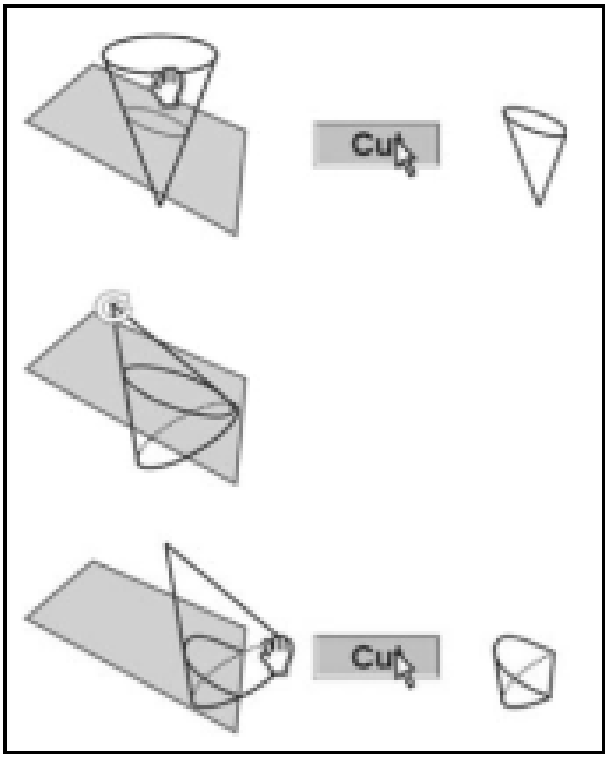


Figura 13 – Uma estrutura de rede infinita mostrando apenas a parte cortada



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 14 – Um cone cortado por meio de um plano.



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

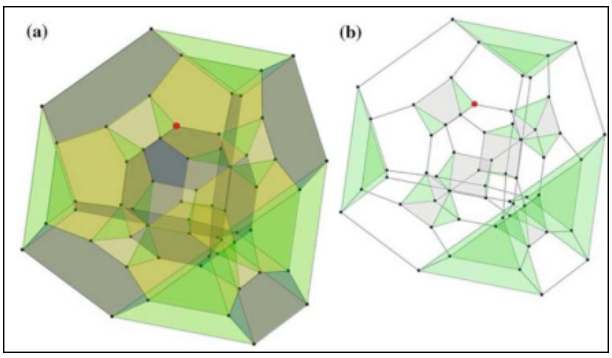
A região cortada da figura 13(b), obtida a partir de um corte na figura 13 (a), ainda preserva bastante informação visual sobre o padrão repetitivo. Logo, a figura 13(b) possibilita que o padrão repetitivo da figura 13(a) seja melhor interpretado. Além disso, como mostrado na figura 14, abaixo, cortar elementos da representação visual permite a visualização de recursos subjacentes ou internos à VMR.

Na figura 14, o corte foi usado para revelar a geometria interna da superfície de rosca 3D cortando-a horizontalmente para permitir a visão do cruzamento entre dois círculos concêntricos.

Interações Baseadas em Tarefas (f) **Filtragem**, filtrar é usado para mostrar, ocultar, ou transformar um subconjunto selecionado de elementos visuais de uma VMR de acordo com a existência ou com a ocorrência de certas características e / ou satisfazer certos critérios. Além disso, filtrar permite controlar a visão dos objetos de interesse escolhendo o grau de detalhes e abstração a serem vistas nas VMRs. A seguir a figura 15 mostra um exemplo de filtragem.

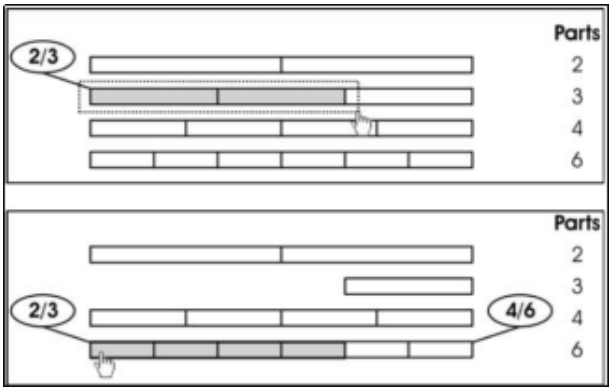
Os politipos de quatro dimensões da figura 15 (a) contêm vários conjuntos de componentes, tais como: vértices, arestas, faces e células. Entretanto, sua aparência ruidosa, decorrente da exposição de todos os componentes constitutivos, dificultará a diferenciação entre tais componentes. Por exemplo, o polítipo da figura 15 (a) contém 20 células tridimensionais: 5 octaedros, 10 prismas triangulares e 5 tetraedros. Para mostrar

Figura 15 – Exemplo de filtragem



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 16 – Exemplo de Fragmentação



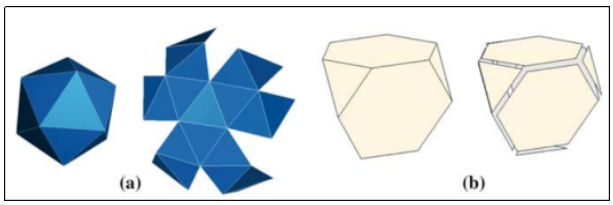
Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

apenas os 10 prismas triangulares da figura 15 (b), foi aplicado o Polyvise, instrumento interativo de visualização de polítipos cujos filtros discretos removem subconjuntos de componentes do polítipo.(SEDIG; SUMNER, 2006). Filtrar é usado, portanto, para investigar ou esconder elementos que, por ventura, favoreçam a existência de ruído. Dessa forma então, a filtragem é um método de análise que possibilita a percepção de sentido e pode ser usada como técnica de inquérito Ibid., favorecendo a construção de perguntas por parte dos aprendizes.

A figura 16 mostra um conjunto de segmentos de linha de igual comprimento. Cada linha foi fragmentada em partes iguais e cada parte pode ser usada para verificar ou descobrir equivalências entre seguimentos. A seguir a figura 17 mostra um exemplo de fragmentação em 3D. Tanto a figura 17 (a) quanto a Figura 17 (b) mostra um icosaedro fechado e, em seguida, mostra fragmentado, revelando assim, cada uma de suas 20 faces conectadas entre si. Entretanto, a figura 17 (b) exemplifica uma fragmentação desconectada.

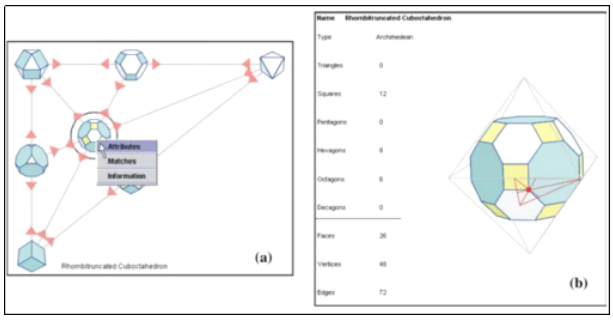
Interações Baseadas em Tarefas (e) **Investigação**, se refere a interagir com a VMR para selecionar algum aspecto, propriedade ou componente para obter informações

Figura 17 – Exemplo de fragmentação em 3D



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 18 – Exemplo de Investigação



ou realizar análises futuras, a seguir a Figura 18 mostra um exemplo de investigação.

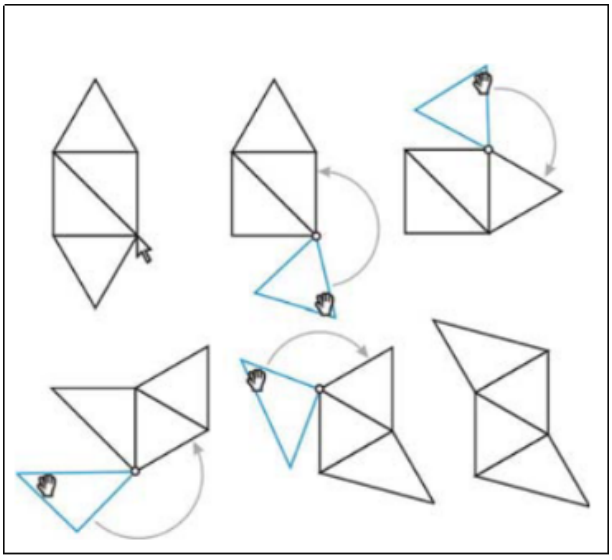
A figura 18(b) é decorrente da figura 18 (a) após ter sido escolhida a opção do menu denominada de exibir atributos do sólido. Desta forma, a VMR da Figura 18 (b) passa a ser exibida detalhadamente, tendo o ruído visual da figura 18 (a) reduzido, ampliando, por conseguinte, o espaço para outras informações. **Interações Baseadas em Tarefas** (f) **Rearranjar**, corresponde a ordenar, sequenciar ou empilhar, mudando, dessa forma, as disposições espaciais ou o direcionamento dos elementos internos de determinada VMR. A figura 19 mostra um exemplo de rearranjar, onde aparecem quatro triângulos cujos vértices são usados para girar um dos triângulos conectados. Dessa forma, a estrutura pode ser rearranjada resultando na combinação de formas, mas cuja área, permanece a mesma

1.4.3.6 *Repicturing*

Repicturing corresponde a interagir com a VMR para mostrá-la de uma maneira alternativa e sob diferentes perspectivas. Como visto na figura 20, a figura 20(a) foi repintada resultando, assim, na figura 20 (b).

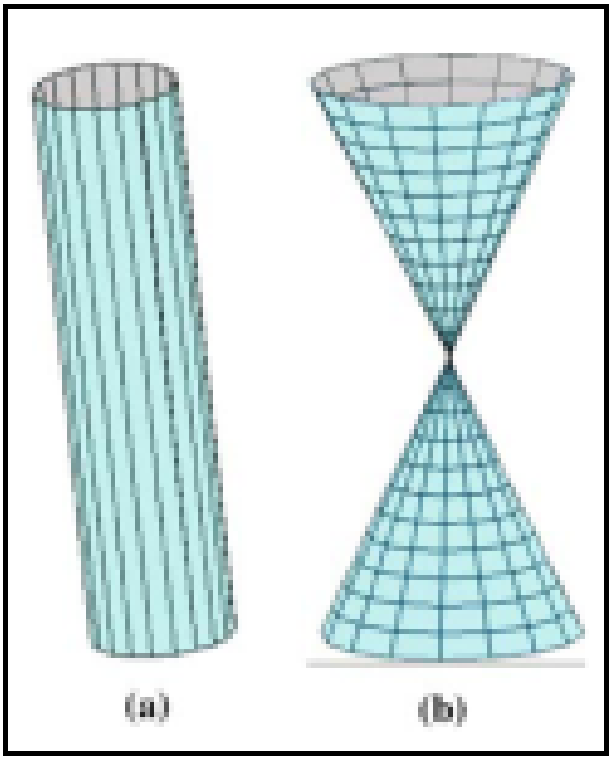
Repicturing, exemplificado na figura 20, diz respeito a interagir com uma VMR para, a partir de perspectivas diferentes, exibi-la de formas alternativas. Repintar pode ser feito a partir de três abordagens: **Espacialmente**, **Semanticamente** ou **Esteticamente**. A primeira está relacionada com a geometria da VMR, a segunda com o seu significado conceitual e a terceira com a aparência do VMR. A seguir, a figura 21 mostra mais um exemplo de *Repicturing*.

Figura 19 – Exemplo de Rearranjar



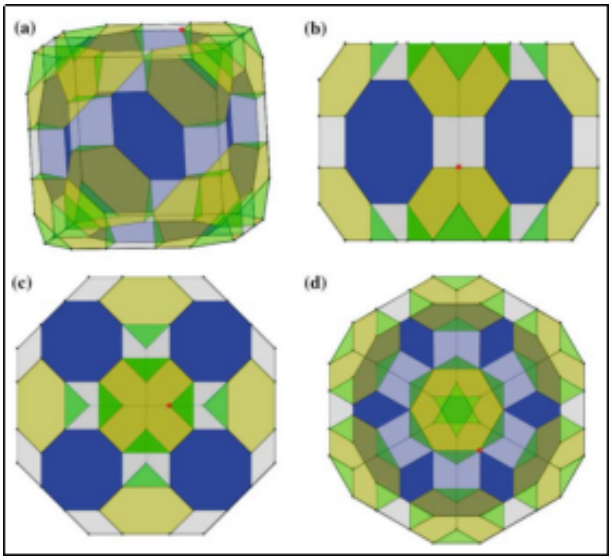
Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 20 – Exemplo de repcturing



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 21 – Exemplo de Repintar

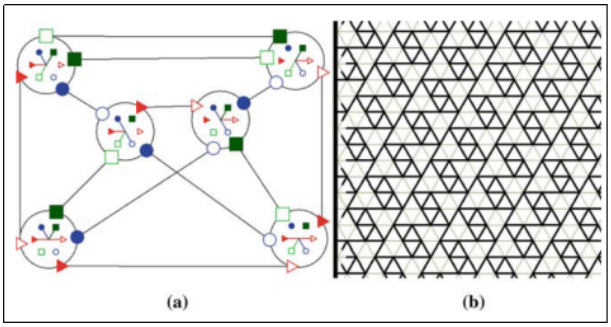


Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Os politipos da figura 21(a) agrupam muitos elementos em uma mesma VMR, tais como: vértices , linhas, faces e células. Logo, mostram uma imagem complexa que, no entanto, pode ser repintada espacialmente e, por conseguinte, visualizada segundo diferentes orientações. As visualizações (b,c,d) são, portanto, macro visões repintadas a partir da figura 21(a). Tanto a figura 20 quanto a figura 21 mostram exemplos uma VMR repintada espacialmente. Como pode ser observado, depois de aplicado o repicturing, a figura 21 (a) permanece a mesma, entretanto pode ser vista a partir de diferentes orientações. Segundo Sedig e Sumner (2006), com visões como essas é possível explorar elementos de um politipo sem, no entanto, modificá-lo. A figura 22 mostra um exemplo de repintar semanticamente. Representações diferentes, tanto na sua geometria quanto na sua parte processual mostram aspectos diferentes do mesmo conceito(SEDIG; SUMNER, 2006). Por exemplo, a figura 22(a) é uma representação diagramática da figura 22 (b) e, essa, por sua vez, é uma representação geométrica da figura 22 (a). Ou seja, o mesmo conceito mostrado segundo duas perspectivas semânticas diferentes.

Nesse exemplo, observa-se, portanto, o papel que múltiplas representações exercem na aprendizagem de conceitos específicos. Elas se prestam a mesma função, entretanto exibem o conceito de maneira diferente, possibilitando que a representação, vista a partir de perspectivas diferentes, contribua na construção de significado sobre os conceitos metaforicamente representados. Nesse sentido, existem inúmeras VMR que podem ser repintadas semanticamente tais como funções, gráficos, estruturas e diagramas, promovendo maior flexibilidade de representação e contribuindo, dessa forma, tanto na identificação de novos elementos presentes na representação quanto na identificação de novos papéis para elementos já percebidos, promovendo assim, diversidade no pensamento matemático(SEDIG;

Figura 22 – Exemplo de repintar semanticamente



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

SUMNER, 2006) .

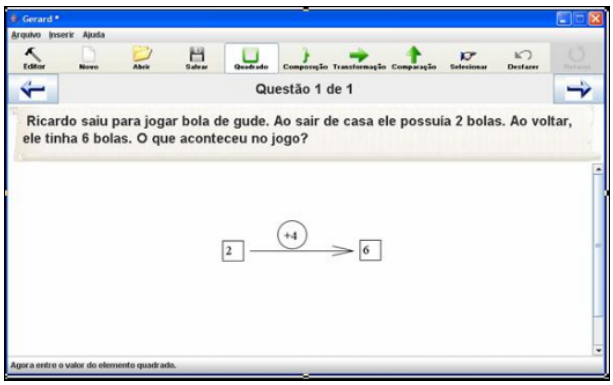
Esses estudos preliminares oferecerem um amplo conjunto de modalidades de interação sobre VMR; entretanto, Sedig e Sumner (2006) observam que as pesquisas na área "*ainda são limitadas e ad hoc*" SEDIG; SUMNER, op. cit., pg-47 tradução nossa, logo, essa categorização não pode ser entendida como um resumo prescritivo que ofereça orientações sobre a adequação de certas VMRs para tarefas específicas e usuários. Sendo necessário, portanto, observar as VMR, bem como suas modalidades de interação num contexto de uso, no qual estão presentes, não apenas a dimensão material, mas principalmente, a dimensão cognitiva, em interação com o meio material (KAPUT, 1994). Assim, amplia-se, portanto, as possibilidades dos aprendizes perceberem as propriedades, características, nuances sutilezas, distinções e aproximações entre representações, bem como as relações entre os conceitos metaforicamente representados.

Nessa pesquisa, os atos de interpretação ocorrem diante de um computador tanto por meio de interfaces de usuário quanto das expressões da representação exemplificada na 23, que são manipuladas mediante modalidades de interação disponíveis na interface. Assim, e tomando por base as discussões sobre VMRs – Visual Mathematical Representations - , bem como sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas, apresentaremos a seguir, o Gerard Braga, Queiroz e Gomes (2008), Queiroz e Gomes (2008), Queiroz et al. (2010), uma interface educativa interativa voltada para formação de professores.

1.5 A interface educativa: Gerard

Enquanto em interfaces de aplicativos, o propósito é proporcionar interações produtivas, fáceis de usar e intuitivas, em interfaces educativas, o propósito é favorecer reflexões sobre os conceitos representados engajando os aprendizes numa interação consciente sobre tais conceitos(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001). Nesse sentido, o Gerard (BRAGA; QUEIROZ; GOMES, 2008; QUEIROZ et al., 2010) cujo nome é em homenagem ao psicólogo francês Gèrard Vergnaud é uma interface educativa voltada para capacitação de

Figura 23 – Primeira versão do Gèrard



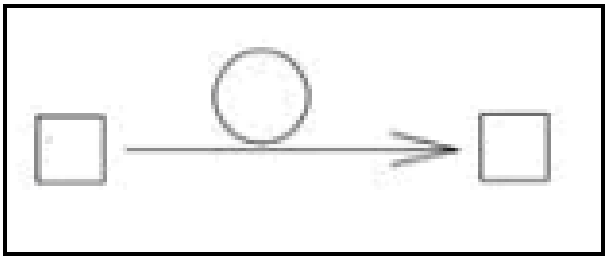
Fonte: (BRAGA; QUEIROZ; GOMES, 2008)

professores sobre os conceitos presentes nas estruturas aditivas como visto na figura 23, que apresenta um menu com os artefatos: editor; novo; abrir; salvar; chaves do diagrama de composição. Em seguida, as setas horizontais e verticais, pertencentes aos diagramas de transformação e comparação, respectivamente. Além dessas, ainda estão presentes as operações de selecionar, refazer e desfazer, bem como, o menu de categorias, a representação textual do problema e, abaixo dessa, o espaço para mostrar o modelo construído correspondente às relações matemáticas imersas no texto. Como pode ser visto, na figura 23 aparece o texto da situação-problema e, embaixo, um diagrama para ser preenchido.

a)Ricardo saiu para jogar bola de gude. Ao sair de casa ele possuía duas bolas. Ao voltar, ele tinha seis bolas. O que aconteceu no jogo?

Para resolver essa situação-problema na interface da 23, é necessário, primeiramente, usar o mouse e identificar a categoria correta à qual pertence a situação-problema. Usar o mouse por meio de diferentes modalidades de interação, portanto, além de favorecer que seja estabelecida uma comparação entre o pretendido e o ocorrido, requer dos usuários diferentes esforços cognitivos(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997). Neste contexto, pode ser escolhida: a **chave**, a **seta vertical** ou a **seta horizontal**. A situação (a) pertence à categoria de Transformação aplicada a uma medida e é representada por uma seta horizontal. Caso seja escolhida a seta horizontal, haverá acerto e, portanto, aparecerá o diagrama da figura 24 vazio, sem valores numéricos. A partir da compreensão do texto, estima-se, portanto, que os objetos matemáticos sejam identificados e, em seguida, posicionados no diagrama. Sendo assim, espera-se que a vivência com o Gerard favoreça a Conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas, no qual, não só um conceito específico é construído, mas as relações que possam haver entre diferentes conceitos sejam percebidas.

Figura 24 – Diagrama de Transformação aplicada a uma medida



Fonte: (VERGNAUD, 1986)

1.6 Perguntas da Pesquisa

À luz dessas discussões anteriores sobre: Estruturas Aditivas, Multiplicativas simples, Mudança conceitual e Modalidades de interação sobre representações, fazemos o seguinte questionamento: O que os usuários puderam fazer no uso das expressões da representação na interface do Gerard?

1.7 Justificativa

A construção do conhecimento matemático pelos alunos se dá na ação sobre os objetos(KAPUT, 1994). Portanto, *é preciso oferece-lhes todos os tipos de conteúdo (objetos, eventos e ações) dentro de todos os tipos de relações.* KAPUT, op. cit., pg-43. Nesse sentido, salienta-se o papel das experiências do cotidiano , por serem significativas, oferecem condições para aprendizagem de conceitos sendo, por conseguinte, frutíferas no ensino da matemática(CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006). Entretanto, apesar dessas orientações iniciais, parece haver um distanciamento entre a formação docente, oferecida pelas universidades e a atuação profissional, pois as universidades têm deixado para os alunos (professores em formação) a inteira responsabilidade de transferir, para sua prática, os métodos e conhecimentos adquiridos durante sua formação (ACIOLY-RéGNER; BRITO; SPINILLO, 2008).

A profissionalização de professores, embora inicie durante sua formação inicial, não se limita a essa, permeando, no entanto, toda a carreira docente, numa formação contínua e continuada para que os fundamentos da formação para o magistério sejam repensados e contextualizados com a prática do professor ACIOLY-RéGNER; BRITO; SPINILLO, op. cit.. A formação continuada de professores, portanto, além de fornecer conhecimentos e corrigir distorções desse processo inicial de formação, contribui para uma reflexão sobre potenciais mudanças introduzidas tanto nos cursos de formação inicial quanto ao longo da atuação profissional do professor(ACIOLY-RéGNER; BRITO; SPINILLO, 2008; GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; ARAÚJO; LUZIO, 2004; FERREIRA; SELVA, 2008; VALENTE et al., 1999).

1.8 Objetivos

1.8.1 Objetivo Geral

Identificar os elementos que influenciaram a conceitualização sobre estruturas aditivas e multiplicativas na interface do Gerard.

1.8.2 Objetivos Específicos

Considerando o desenvolvimento do trabalho e o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

1. Identificar as expressões da representação e sua relação com a conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas.
2. Analisar os elementos representação de Vergnaud, bem como as possibilidades de manipulação desses na interface na sua relação com a conceitualização na interface do Gerard.
3. Analisar as maneiras de manipulação, potencialmente utilizados, na interface do Gerard.
4. Analisar o modo de ofertar feedbacks visuais (formas e cores) na interface do Gerard e sua relação com a conceitualização.

A seguir justificamos cada objetivo específico.

Objetivo específico 1: Identificar as expressões da representação e sua relação com a conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas.

Existe alta complexidade envolvida no design de softwares educacionais pois, além da facilidade inerente ao uso, precisam, além de mostrar os elementos representativos dos conceitos veiculados, engajar os aprendizes em atividades conscientes de construção do conhecimento(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997). Sendo assim, é necessário, primeiramente, identificar as expressões da representação frutíferas em atividades voltadas para resolução de situações aditivas e multiplicativas.

Objetivo específico 2: Analisar os elementos da representação de Vergnaud, bem como as possibilidades de manipulação desses na interface potencialmente relacionada com a conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas.

Uma interface de software educacional é voltada para proporcionar uma vivência com situações promotoras de sentido sobre conceitos específicos e, dessa forma, colocar os usuários em contato direto com os conceitos metaforicamente representados (MOREY;

SEDIG, 2004; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997). Nesse contexto, a legenda de Vergnaud (1986), bem como as modalidades de interação sobre seus elementos constitutivos representam os conceitos sobre soma, subtração, multiplicação e divisão. Logo, é necessário identificar modalidades de interação sobre os diagramas que salientaram aspectos importantes do conceito.

Objetivo específico 3: Analisar os as protocolos de mouse, potencialmente utilizados, na interface do Gerard.

Diferentes modalidades de interação são operacionalizadas na interface por meio de protocolos de mouse, os quais dizem respeito a maneira como os elementos constitutivos da representação são manipulados. O esforço cognitivo exigido em determinada atividade instrucional é influenciado pela manipulação dos elementos da interface(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997) e, por conseguinte, na aprendizagem de conceitos específicos (DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001). Sendo assim, é necessário examinar não só os elementos constitutivos da representação, mas também os protocolos de mouse, potencialmente utilizados, notadamente, aqueles que tenham salientado melhor os aspectos importantes de um determinado conceito(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001).

Objetivo específico 4: Analisar o modo de ofertar *feedbacks* visuais (formas e cores) na interface do Gerard e sua relação com a conceitualização.

O estilo de interação influencia na aprendizagem de conceitos específicos(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001). Entretanto, estilos de interação diferentes exigem esforços cognitivos diferentes(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIGHIAN; WESTROM, 1997). Nesse sentido, no estudo realizado por Ibid. o estilo de interação denominado **Manipulação Direta Reflexiva de Conceitos** exigiu mais esforço cognitivo SEDIG; KLAWE; WESTROM, op. cit.. Tal estilo se caracteriza pelo uso de representações metafóricas de conceitos, bem como pela oferta e posterior retirada de *feedbacks* visuais durante a execução de tarefas denominado na literatura de *Scaffolding* (WOOD; BRUNER; ROSS, 1976). Por esse motivo, é necessário verificar, assim como fizeram Ibid. se houve ou não influência dos feedbacks visuais(cores e formas), bem como da retirada gradativa desses feedbacks visuais no processo de conceitualização.

1.9 Contribuições

Esta pesquisa mostrará como aconteceu a vivência de professores na interface do Gerard, mostrado na figura 23, bem como se tal vivência influenciou na mudança conceitual ou Conceitualização sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas. Por esse motivo, seus resultados fornecerão insumos potencialmente utilizados na construção de interfaces educativas especificamente voltadas para o ensino de soma, subtração, multiplicação

e divisão. Além disso, tal pesquisa favorecerá a formação continuada de professores, particularmente em situações de aprendizagem a distância.

1.10 Organização

A fim de proporcionar um claro entendimento da nossa proposta, a tese, resultante de nossa pesquisa, foi organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 está a Revisão de literatura abordando sobre a Fundamentação Teórica; no capítulo 3 os Aspectos Metodológicos; no capítulo 4, os resultados do estudo: Expressões da representação utilizadas para apoiar o ensino das estruturas aditivas e multiplicativas; no capítulo 5: resultados do estudo: Representações visuais, modalidades de interação e ensino das estruturas aditivas e multiplicativas; no capítulo 6: resultados do do estudo: A conceitualização sobre soma e subtração no uso de representações diagramáticas em uma interface educativa; no capítulo 7: resultados do estudo: Multiplicação, divisão por partes ou divisão por cotas: como a construção de diagramas influencia na significação sobre Estruturas Multiplicativas; capítulo 8: Considerações finais;

2 Revisão da Literatura e Fundamentação Teórica

Para explicar o mundo, suas relações e regularidades, cientistas oferecem explicações para fenômenos existentes , mostrando como esses podem se tornar alcançáveis à compreensão de outros seres humanos. Para tanto, são criadas teorias, conceitos, leis e princípios que generalizam seus achados, permitindo, por conseguinte, propagá-los para a sociedade em geral. Em outras palavras, cientistas observam fenômenos por meio de simulações e usam modelos matemáticos para explicar e expressar quantitativamente tais fenômenos(BREDEWEG et al., 2006). A vista disso, percebe-se que a Matemática fornece meios para se entender a realidade: desde o simples ato de ler as horas, passando pela emissão de um diagnóstico médico e a construção de naves espaciais; em tudo isso, encontramos a necessidade de oferecer interpretações com base em modelos Matemáticos (HELLMEISTER; DRUCK et al., 2004). Nesse sentido, problemas do mundo real , explicados pela matemática, poderíam, ser utilizados para favorecer a aprendizagem de matemática por meio de um processo denominado modelagem da realidade (HATANO, 1997).

No cenário acima descrito, a matemática torna-se, portanto, um sistema de conhecimento(GÉRARD, 1998), ou seja, um meio a partir do qual um fenômeno será, inicialmente, observado, visualizado, descoberto, compreendido e, posteriormente, explicado. "*Um modelo é, portanto, uma forma útil de representar a realidade*"(DOUGLAS; RANDALL, 1999, pg-01), tradução nossa). Um protótipo de um carro; uma equação matemática que representa crescimento populacional; uma peça de roupa exposta num desfile de moda são representações que, apesar de genéricas, abrigam aspectos culturais que influenciaram sua criação. Todos esses, segundo Ibid., constituem-se como formas de representação da realidade. No entanto, cada um atende a um propósito específico; por exemplo, um protótipo de um carro fornece meios para compreender como o carro será produzido; custo; manutenção; aceitabilidade de mercado; comparação com outros modelos similares e todo um conjunto de possíveis utilidades descobertas para o modelo.

> No caso da peça de roupa, essa representação fornece indicações de como o objeto criado pelo design será recebido pelo público, bem como sua adequação a corpo humano, ou seja, diferentes propósitos requerem diferentes tipos de modelos DOUGLAS; RANDALL, op. cit., pg-01, tradução nossa.

Um modelo matemático é, portanto,

> uma descrição matemática, frequentemente representado por meio de uma função ou de uma equação de um fenômeno do mundo real, tal como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer, ou o custo da redução dos poluentes(STEWART, 2005, pg-15), tradução nossa.

Entretanto, os modelos são elementos transitórios e, portanto, construí-los, juntamente com o propósito de sua criação é mais relevante do que o resultado produzido(DOUGLAS; RANDALL, 1999).

2.1 A atividade científica

Segundo Hatano (1997), a construção de modelos oferece múltiplas e simultâneas interpretações e, por conseguinte, contribui para se entender várias atividades científicas. Entretanto, tal construção carece de monitoramento cuidadoso da sua plausibilidade em cada passo da modelagem HATANO, op. cit.. Sendo assim, Ibid. exemplifica a atividade científica como protótipo da classe de atividades que usam modelagem matemática tanto na descoberta de novos conhecimentos quanto na exposição dos resultados obtidos ao longo do percurso. Entretanto, convém pontuar que embora a matemática contribua para explicar e entender problemas do mundo real, as mudanças conceituais que caracterizam a matemática são diferentes daquelas que caracterizam a ciência(GREER, 1992) e, portanto,

> as mudanças revolucionárias nas ciências são caracterizadas pela substituição dos conhecimentos antigos pelos novos conhecimentos, enquanto que na Matemática as mudanças conceituais são caracterizadas pela retenção da estrutura antiga, que é, a partir de então, classificada como uma subestrutura do conhecimento novo Ibid., pg-541, tradução nossa.

Ibid., pg-541 complementa dizendo que, a "*Matemática não experimenta mudanças revolucionarias*", mas, mudanças conceituais, decorrentes de reestruturações conceituais, que ocorrem tanto na descoberta de conhecimentos quanto na aprendizagem de conceitos matemáticos GREER, op. cit.. Apesar disto, o processo instrucional dá pouca atenção às mudanças conceituais potencialmente ocorridas em atividades de aprendizagem, bem como aos caminhos que possam favorecê-las. Resultando, por conseguinte, no desenvolvimento de concepções limitadas por parte dos aprendizes GREER, op. cit..

2.1.1 Modelagem Matemática e Representação

Kamii (1983) mostra que uma criança percebe o conceito de número, por exemplo, pondo a mesa para as refeições da família, com a chegada de mais um familiar, será necessário colocar mais um prato à mesa. Dessa forma, dar-se-ão, portanto, novas situações, que requerem, por conseguinte, novas soluções. Ou seja, existe uma relação qualitativa, potencialmente percebida, que favorece a construção do número que representa a quantidade de pratos necessária para atender a todos os familiares. Nesse cenário, com

a chegada de um novo familiar, a criança cuja ação era observada retirava todos os pratos da mesa e os recolocava acrescentando mais um. Ela só percebeu que não precisava retirar todos os pratos, quando já havia realizado essa tarefa onze(11) vezes. Em exemplos como esse, fica evidente que simular eventos unitários favorece a percepção de regularidades sobre situações e contribui para construir conhecimentos abstratos KAMII, op. cit.. A modelagem, portanto, é usada na aprendizagem de conceitos matemáticos para propor, construir e observar resultados de simulação e, por conseguinte, requer seu registro em algum meio de expressão. Nesse sentido, Elia, Gagatsis e Demetriou (2007), Gagatsis e Elia (2005), Michaelidou, Gagatsis e Pitta-Pantazi (2004), Sedig e Sumner (2006), Selva (2004), Wessels (2006, 2006) apresentam e discutem o papel que expressões da representação apresentam na aprendizagem de conceitos específicos.

2.1.2 Representações como mediadoras da aprendizagem de conceitos específicos.

Expressões da representação "*determinam a estrutura dos processos mentais de uma pessoa*"(KAPUT, 1994, pg-55), tradução nossa e, segundo Gagatsis e Elia (2005), estão fortemente conectadas a conceitos matemáticos, servindo, portanto, não só para propor, construir e testar simulações, mas também para expressar, explicitar e registrar ideias, pensamentos e conclusões, que tenham emergido durante a resolução de situações-problema(GAGATSIS; ELIA, 2005; GREER, 1992; HATANO, 1997; SELTER et al., 2012; VERGNAUD, 1983). Por exemplo, gráficos, e funções que os representa são tão conectados que, na ausência dos gráficos, entender funções, bem como suas características, torna-se dificultado. Nesse sentido, as expressões da representação apresentam um duplo papel: elas tanto permitem representar conceitos específicos quanto observar mudanças conceituais reveladoras de uma aprendizagem de conceitos potencialmente decorrentes da interação entre a mente dos aprendizes e as expressões da representação(GREER, 2004; HATANO, 1997).

Expressões da representação podem ser estáticas ou interativas e, embora ambas apresentem algum tipo de limitação quanto a expressividade do conceito, comparativamente às representações interativas, as estáticas, em razão da ausência de movimento, seriam menos expressiva de conceitos e, por conseguinte, teriam sua capacidade mediadora comprometida(SEDIG; SUMNER, 2006; SINGER, 2009). Segundo Singer (2009), tal limitação se deve ao fato de que categorizar objetos envolve tanto identificar a classe a qual pertence determinado objeto quanto reconhecê-lo como protótipo de determinada classe, sendo, portanto, tal processo possibilitado pela presença de movimento sobre os objetos.

2.2 Influências da cultura na aprendizagem matemática

A aprendizagem matemática embora considerada como consequência de mudanças conceituais que ocorrem por meio de processos cognitivos (GREER, 2004).

> está inserida num contexto mais amplo no qual aspectos relacionados a afetividade e a meta-cognição influenciam tais processos. Esse contexto está alinhado com a perspectiva da revolução cognitiva na qual fatores sociais, históricos, culturais e afetivos foram reconhecidos GREER, op. cit., pg-541, tradução nossa.

Nesse sentido, o meio cultural influencia a significação, e, em razão disso, Correia (2003) diz que é necessário modificar o nível de análise, considerando agora, tanto as influências culturais quanto o contexto no qual a atividade está inserida. Em razão disso, a orientação cultural tem sido adotada em pesquisas sobre a mente, bem como sobre aprendizagem da Matemática (GREER, 2004). Por exemplo, (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006) mostraram que em situações de compra, venda e medições, algumas crianças significavam a matemática de maneira particular e, além disso, aprendiam de maneira diferente daquelas que frequentavam o ensino formal.

Nessa mesma linha e partindo da atividade de pintar carros, Yeh e Nason (2008), propuseram tarefas de juntar cores em diferentes proporções para favorecer a significação do conceito de fração. Ou seja, tanto as palavras como carrinhos, bolinhas e dinheiro para crianças quanto a tarefa de pintar carros para participantes adultos remetem a ações sociais e ajudam a construir significados matemáticos (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006; YEH; NASON, 2008). Componentes sociais presentes em ações, portanto, dizem respeito ao propósito de aprender matemática, possibilitam negociação e legitimidade, pois utilizam materiais autênticos e, além disso, contribuem na construção do significado Matemático(YEH; NASON, 2008).

2.3 A Representação de Vergnaud

Situações Aditivas

- Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas 4 garotos e 7 garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa? 7 + 4 = ?

- Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficu com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra? ? - 4 = 7

- Carlos tem 4 anos. Maria é 7 anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria? ? - 7 = 4

- Roberto foi jogar vídeo game. Ao fim da primeira fase do jogo ele tinha perdido 4 pontos. Ele, então, foi para a segunda e última fase do jogo. Ele terminou o jogo com 7 pontos ganhos. O que aconteceu na segunda fase? $-4 + ? = 7$

Embora a expressão matemática necessária para representar todas as situações-problema como exemplificadas acima seja $4+7 = 11$, não reflete as relações inseridas em cada contexto (MAGINA; AL., 2001). Ou seja, não informa ao aprendiz que existem situações de naturezas diferentes nem tampouco, deixa evidente por quais caminhos se chegou a operação de soma. Sendo assim, o primeiro passo para resolver tais exemplos é identificar a categoria - **Composição**, **Transformação** e **Comparação** - a qual pertence tal situação-problema (VERGNAUD, 1986). Perceber aspectos qualitativos de cada situação-problema contribui para identificarem-se distinções e aproximações entre situações e, por conseguinte, entre conceitos VERGNAUD, op. cit.. Entretanto, tal percepção ficará comprometida, se o formato, meio material ou expressões da representação, não explicitarem os elementos diferenciadores presentes em cada situação-problema. O formato $4 + 7 = 11$, portanto, não contribui para entender o nascedouro da operação, seja soma ou subtração. Por esse motivo, Ibid. propõe uma representação diagramática mostrada nos quadro 1 e quadro 2 para evidenciar as distinções entre situações-problema.

Quadro 1 – Legenda de Vergnaud para representar conceitos

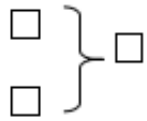
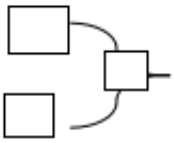
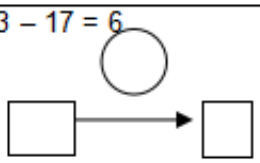
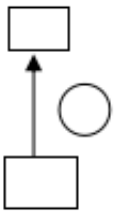
Legenda	Função ou descrição
{	A chave representa a categoria de Composição medidas ou grandezas.
□	O quadrado representa uma medida ou um número natural.
○	O círculo representa o número relativo.
→	A seta horizontal representa a categoria de Transformação.
↑	A seta vertical representa a categoria de Comparação.

Fonte: Do Autor.

As figuras individualmente apresentadas no quadro 1 constituem os diagramas apresentados no quadro 2, a seguir

Na linha um (01), coluna(01) do Quadro 2 aparece a categoria, o enunciado da situação-problema, na coluna (02) dois, o diagrama e, na coluna (03) três, a representação da situação-problema juntamente com a representação numérica. Cada categoria das situações aditivas requerem conhecimentos diferentes e, por conseguinte, mobilizam raciocínio diferentes (VERGNAUD, 1986; GÉRARD, 1998). Por exemplo, na linha dois (02) aparece uma situação-problema do tipo Transformação aplicada a uma medida, na qual existiam (23) vinte e três bombons. Ao final do dia, constatou-se que essa quantidade inicial foi

Quadro 2 – Situações-problema do campo aditivo

Categoria	Representação da categoria	Representação da situação-problema e da solução numérica
I. Composição de medidas João tem 12 petecas e Pedro tem 17. Quantas petecas eles têm juntos? São duas quantidades, que estão expressas, de existência concomitante, a partir das quais o indivíduo deve compor uma terceira quantidade.		12 + 17 = 29 
II. Transformação de medida Maria tinha 23 bombons. Ao final do dia, percebeu que só tinha 17. Quantos bombons Maria comeu durante aquele dia? A quantidade inicial e final são conhecidas, mas, no caso, o que se deseja saber é o valor da transformação que ocorre entre o primeiro e o segundo momento.		23 – 17 = 6 
III. Comparação de medidas Eu tenho 16 livros, você tem 43. Quantos livros você tem a mais do que eu? Mais uma vez, as quantidades são conhecidas e concomitantes, buscando-se comparar a diferença existente entre as duas (relação).		43 – 16 = 27 

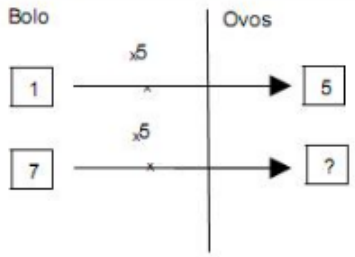
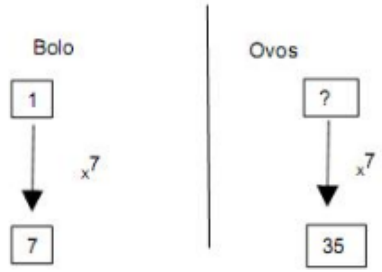
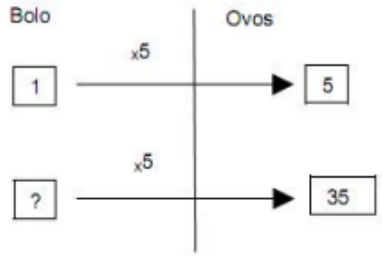
Fonte: Do Autor.

modificada resultando na quantidade 17(dezessete) que corresponde ao estado final. Nesse cenário, é solicitado o valor da transformação. O diagrama equivalente aparece na coluna (02) dois composto por dois quadrados, uma seta horizontal direcionada para direita e um círculo. Os quadrados representam o estado inicial e o estado final, a seta denota a mudança ocorrida entre o estado inicial e o final. O círculo representa o número relativo que aplicado ao estado inicial resulta no estado final.

Situações Multiplicativas

Para resolver as situações multiplicativas do quadro 3 é necessário identificar os elementos no texto, números, representativos de quantidades para, em seguida, posicioná-los corretamente no diagrama. Entretanto, é necessário utilizar uma representação esquemática que explicite as relações, potencialmente existentes entre as quantidades presentes no texto e, sendo assim, corresponda à situaçã-problema proposta, pois, caso contrário, as relações potencialmente existentes entre as quatidades não serão percebidas(VERGNAUD, 1983; VERGNAUD, 1986; VERGNAUD, 1988; GÉRARD, 1998). Os diagramas da coluna (01) do quadro 3, por exemplo, representam esquematicamente as situações-problema categorizadas como Estruturas Multiplicativas e, com base na divisão espacial denotada pelo segmento de reta vertical, estima-se que as quantidades sejam, corretamente, posicionadas.

Quadro 3 – Situações-problema do campo multiplicativo

Categoria	Diagrama
I. Multiplicação Um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos? Desconhece-se o valor total e conhece-se o número de partes e o valor de cada parte. Nesse caso, o valor total é encontrado multiplicando-se o número de partes pelo valor de cada parte.	
II. Divisão por partes Para fazer sete bolos, são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos têm a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo? Desconhece-se o valor de cada parte e conhece-se o valor total e o número de partes. Nesse caso, o valor de cada parte é encontrado dividindo-se o valor total pelo número de partes.	
III. Divisão por cotas Quantos bolos podem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos? Desconhece-se o número de partes e conhece-se o valor total e o valor de cada parte. Nesse caso, o número de partes é encontroado dividindo-se o valor total pelo valor da cada parte.	

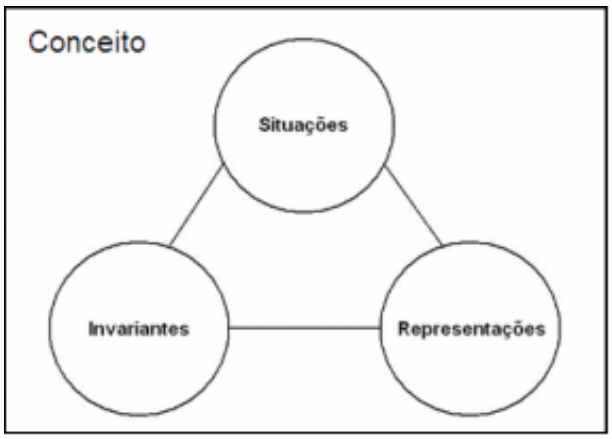
Fonte: Do Autor.

Construir os diagramas, como presentes no quadro 2 e quadro 3 contribui na percepção de proposições sobre as ações, bem como sobre os conceitos mobilizados em cada ação (VERGNAUD, 1983; VERGNAUD, 1986; VERGNAUD, 1988; GÉRARD, 1998). Os diagramas são, portanto, ajudas ou suportes voltados para direcionar a resolução das situações-problema e, por conseguinte, explicitar seu modelo qualitativo, favorecendo, dessa forma, a compreensão da estrutura profunda do problema.

2.4 Conceitualização ou construção do conceito

Essa variedade de situações exemplificadas no quadro 2 e quadro 3 que requerem conhecimentos diferentes e, por conseguinte, mobilizam raciocínios diferentes, Vergnaud (1986), Gérard (1998) denomina de **Campo Conceitual**. Por exemplo, a figura 25, a seguir apresenta três componentes, identificados por Gérard (1998) como ingredientes do

Figura 25 – -Conceito segundo Vergnaud



Fonte: (VERGNAUD, 1986)

conceito e colaboram de maneira equilibrada para **Conceitualização ou Construção do conceito.**

Na figura 25,Vergnaud (1983), Vergnaud (1988), Gérard (1998) identifica três componentes sobre os quais repousa um conceito: **(a)Situações**, **(b)Invariantes**, e **(c)Representações**. A conceitualização, segundo esse autor, ocorre, portanto, na resolução de variadas (a) situações-problema, favorecidas pela percepção de (b) proposições sobre ações e sobre conceitos, mediados por (c) representações metafóricas de conceitos. (a) problemas matemáticos são inseridos dentro de situações-problemas que, neste contexto, são textos com estórias que, por conter elementos presentes no cotidiano do aprendiz, tais como: carrinhos, bolinhas e bonecas, estima-se que se tornem mais significativos para ele. (b) invariantes operatórios são proposições sobre as ações realizadas e sobre os conceitos representados GÉRARD, op. cit.. A conceitualização, proposta por Ibid., portanto, acontece por meio da resolução de situações-problema, que dão sentido a conceitos específicos e às conexões potencialmente existente entre vários conceitos anteriormente vivenciados na resolução de situações-problema. Os componentes da figura 25 são, portanto, igualmente importantes na conceitualização ou construção do conceito.

3 Aspectos metodológicos

3.1 Materiais

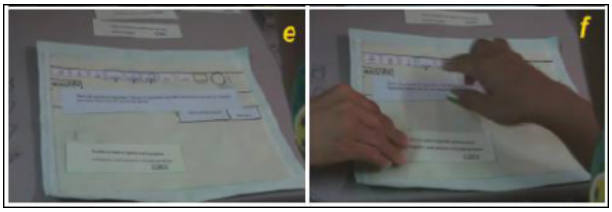
Um protótipo em papel é uma variação de testes de usabilidade, no qual usuários representativos interagem com uma versão de baixa fidelidade da interface para realizar tarefas reais (SNYDER, 2003). Com um protótipo em papel é possível antecipar contingências, evitando, assim, gastar tempo e esforço para construir uma versão em linguagem de programação. Para entender melhor tal proposta, observemos a figura 27, a seguir, que mostra um exemplo de experimento, na qual estão presentes três experimentadores e um participante. Na figura 27 aparece uma mesa. Em cima dessa, o protótipo em papel. Ao redor da mesa estão o participante, o facilitador, o simulador e o observador. Uma câmera, posicionada atrás do participante, registra todas as ações executadas sobre o protótipo.

O facilitador, por sua vez, assume o papel do computador gerando os estados atingíveis da interface e reagindo às ações realizadas, sem, contudo, conduzi-las. Além dele, ainda existe a figura do observador, que, observando o experimento, faz anotações em cartões indexados, os quais possibilitam refinar o comportamento do facilitador, bem como do simulador, além de servirem como insumos na construção dos componentes da interface. A seguir, a figura 28 apresenta mais um exemplo de protótipo em papel. A figura 29 mostra uma situação que antecipa para projetistas de interfaces necessidades de uso associadas à mobilidade do artefato. Logo, como visto na figura 26, figura 27 e figura 29, existe grande potencial de sucesso na prototipação em papel.

3.1.1 Qualrus

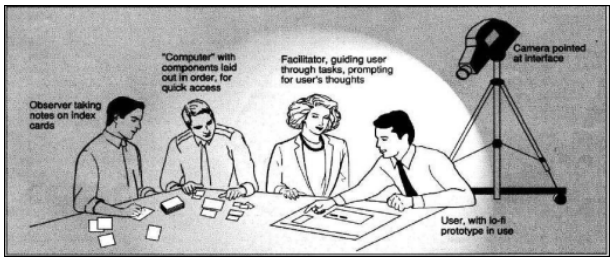
O Qualrus é um software de análise qualitativa que auxilia pesquisadores a categorizar fontes de dados reduzindo o texto original e ajudando, por conseguinte, a responder as perguntas de pesquisa. Ele oferece alguns elementos que irão nortear a categorização:

Figura 26 – Protótipo em papel



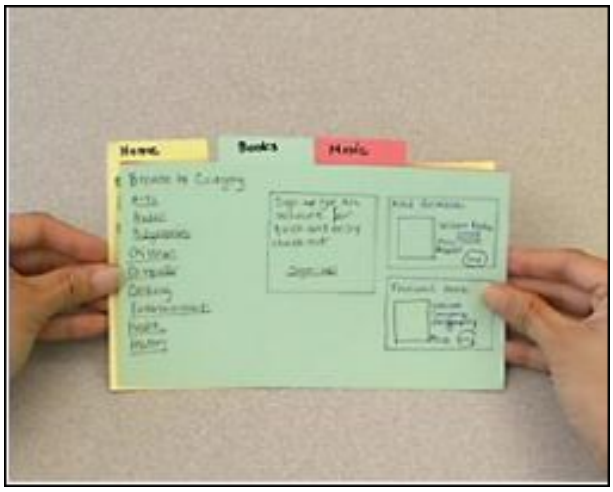
Fonte: O autor

Figura 27 – Experimento com protótipo em papel



Fonte: (RETTIG, 1994)

Figura 28 – Exemplo de compontente construido em papel



Fonte: (RETTIG, 1994)

Figura 29 – Protótipo de dispositivo móvel

Fonte: (MICROSOFT, 2010)

- fontes de dados (textos brutos coletados no experimento);
- segmentos (parágrafos ou pedaços de textos) para codificação e análise;
- códigos, (elementos descritores, que ajudam a reduzir o texto, agregando os primeiros significados aos dados brutos).
- projeto, arquivo que agrupa fontes de dados, segmentos e códigos, possibilitando identificar e mostrar relacionamentos, potencialmente, existente entre eles.

A seguir, veremos mais detalhadamente cada elemento presente no Qualrus.

Códigos Simples são elementos significativos dentro do contexto da pesquisa utilizados para reduzir os textos brutos, criando códigos para referenciar datas, organizações, estudantes, bem como elementos específicos do contexto da pesquisa, como pode ser visto na figura 30

Arquivos fonte agrupam dados brutos, base para criação de **códigos simples**, bem como para categorização. Embora os arquivos fonte do Qualrus possam ser do tipo texto, áudio ou vídeo, na ferramenta existem maior quantidade de mecanismos de tratamento para os arquivos do tipo texto.

Categorias agrupam códigos simples. Por exemplo, para o código simples denominado professor pode ser criado um agrupamento ou categoria denominada professor por nota. Ou seja, o processo de categorização usa critérios de similaridade que são dependentes do contexto da pesquisa.

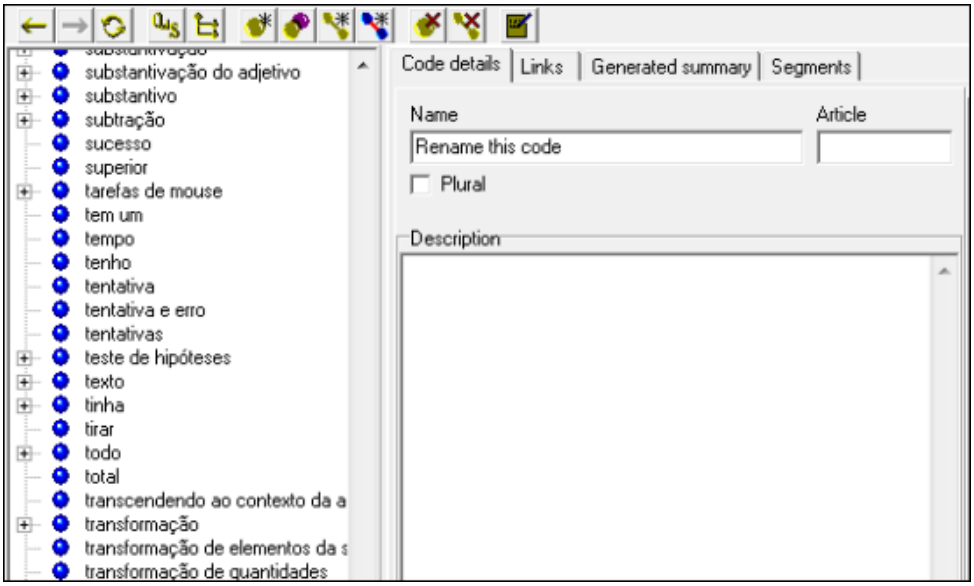
Arquivo de projeto agrupa os elementos envolvidos na pesquisa: arquivos fontes, códigos simples, pilhas de categorias e visões.

Os **processos presentes no Qualrus** no Qualrus envolvem a descoberta de relacionamentos, potencialmente existentes entre códigos e segmentos de texto.

A Codificação Aberta é o processo de associar **códigos simples**, previamente criados, a segmentos de texto relacionandos-os sob a ótica perspectiva teórica utilizada, definindo, assim, relacionamentos durante a construção de redes semânticas sobre os dados. Por exemplo, na figura 31 o código denominado de **operação** possibilita uma ação, já o código denominado **pergunta** é feita tanto sobre uma **ação** quanto sobre uma **ação sem explicação** é um especialização do tipo **ação**. Uma ação é, por conseguinte, uma generalização da **ação sem explicação**. Ao concluir a Codificação Aberta, os dados brutos terão sido associados a uma coleção de códigos previamente criados e que apresentam significado no contexto da pesquisa, tal coleção poderá, portanto, ser analisada sob a perspectiva da **codificação axial**.

Durante a **Codificação Axial**, dados são vinculados por meio de significados, balizando assim, análises e interpretações dos achados de pesquisa, permitindo, assim,

Figura 30 – Exemplo da criação de códigos ou codificação aberta



Fonte: Software Qualrus

identificarem-se categorias de mais alto nível, as quais explicam melhor os dados e mostraam padrões potencialmente existentes. Por exemplo, na figura 31, os resultados são mostrados como redes semânticas construídas a partir dos relacionamentos perceptíveis tais como generalizações e especializações. Além disso, servem como insumos para **codificação seletiva**.

Na **Codificação Seletiva**, segmentos, anteriormente associados a códigos, durante a **codificação axial**, são categorizados com base em critérios de similaridade definidos no contexto da pesquisa. As informações, resultantes desses processos, podem ser visualizadas por meio de visões.

Visualização de resultados

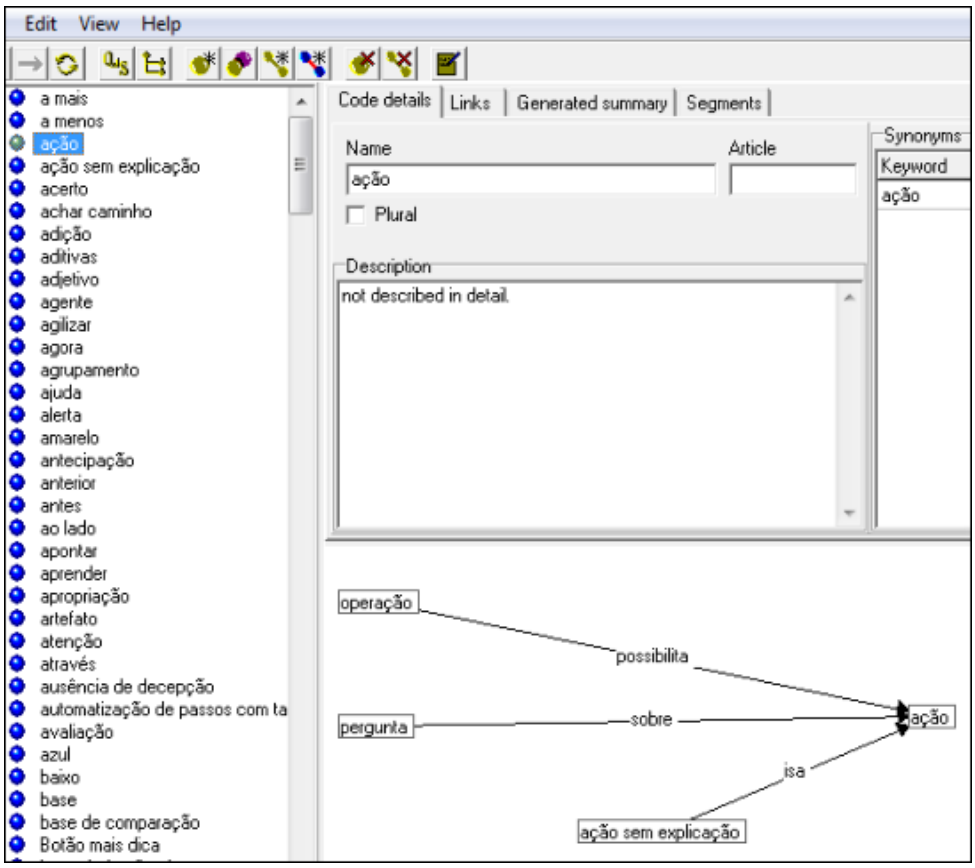
Visões

As visões mostram graficamente a rede semântica obtida, códigos, bem como seus relacionamentos resultantes da **codificação seletiva**, que, em associação com os comentários feitos para justificar a criação de cada código, bem como dos relacionamentos entre eles, lembram ao pesquisador os motivos de sua criação. Além disso, as visões possibilitam que, consultando à rede semântica, o Qualrus simule um comportamento inteligente e ofereça ajuda durante a associação entre códigos, categorização e geração de estatísticas sobre predominância tanto de códigos quanto de relacionamentos entre esses.

Visão estatística

A visão estatística, presente na figura 32, mostra a quantidade vezes que determinado código foi associados a segmentos de texto. Por exemplo: marcando-se *radiobutton*

Figura 31 – Exemplo da criação de relacionamentos ou links



Fonte: Sofware Qualrus

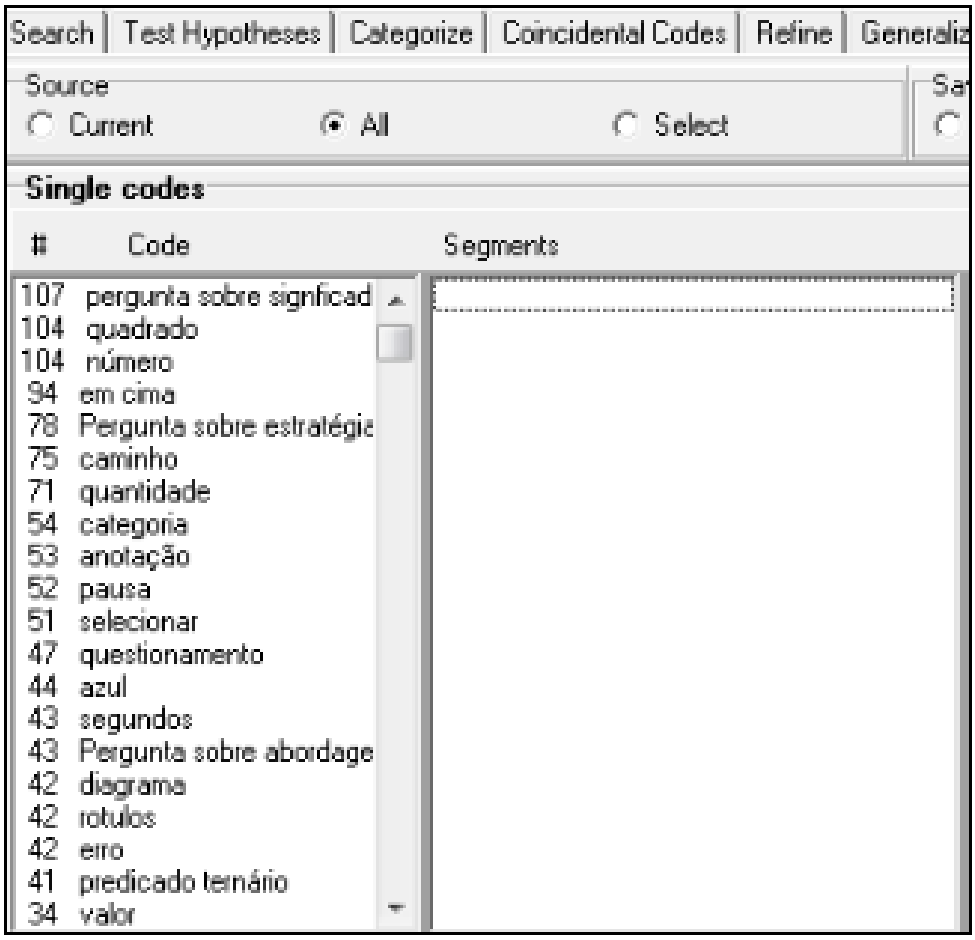
All, vê-se que o código denominado **Pergunta sobre significado** apareceu (107) cento e sete vezes nos dados. Dessa forma, é possível saber quais elementos predominaram no experimento. Além disso, vê-se na figura 32 que das (107) cento e sete vezes que houve a ocorrência do código Pergunta sobre significados, (88) oitenta e oito vezes ele esteve associado a um **número**.

Na figura 33, das (94) ocorrências do elemento quadrado, ocorreu também o código denominado em cima. Das (88) oitenta e oito vezes em que se perguntou sobre o significado de um elemento, essa pergunta foi feita sobre um número. Esse tipo de informação mostra a predominância de alguns elementos durante o experimento.

3.2 Procedimentos Éticos

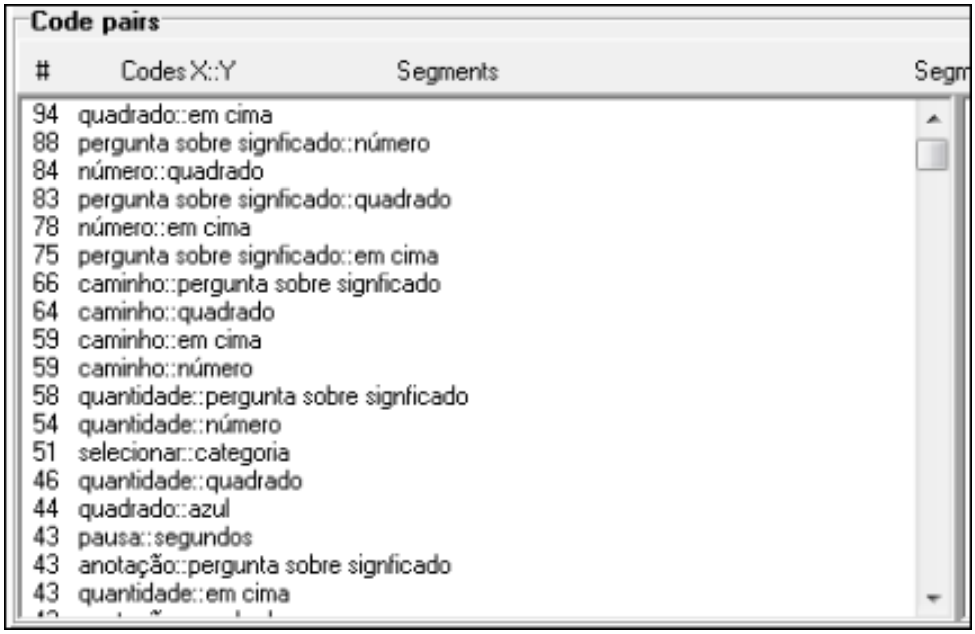
No dia seis (06) de julho de 2009, houve a primeira reunião na SEDUC- Secretaria de Educação de Juazeiro BA para selecionar os nomes das escolas participantes com base na quantidade de alunos matriculados nas séries iniciais do Ensino Fundamental I. A segunda reunião aconteceu às 14h00min do dia dezesseis (16) de setembro de 2009 nas dependências da SEDUC com a participação das coordenadoras pedagógicas, que foram informadas

Figura 32 – Estatísticas sobre a pesquisa



Fonte: qualrus

Figura 33 – Relacionamento entre pares de códigos



Fonte: Software Qualrus

sobre a natureza do projeto, sobre sua finalidade, bem como sobre a importância de sua participação. No fim da apresentação, algumas coordenadoras concluíram que sua presença nos experimentos aumentaria o envolvimento dos professores e, por esse motivo, decidiram participar. Nessas reuniões foram marcadas as visitas às escolas, as quais ocorreram sempre acompanhadas por uma representante da SEDUC e responsável por informá-las os dias e horários das visitas. Nas escolas, os professores eram informados sobre os benefícios para o ensino das Estruturas Aditivas e Multiplicativas advindos de sua participação, e que, além disso, haveria gravações e filmagens de suas mãos interagindo com a interface e que, finalmente, para os resultados desta pesquisa serem divulgados, cada uma delas precisaria assinar o termo de consentimento presente no ANEXO B - Formulário de Consentimento do Participante. Nesse contexto de aproximação, o projeto foi submetido ao comitê de ética em 15 de março de 2010 e teve sua aprovação com número de protocolo de 22041001 CEEHA/UNIVASF conforme APÊNDICE D. Feito isso, os experimentos foram iniciados em maio de 2010 e concluídos em fevereiro de 2011.

3.3 Delineamento da pesquisa

Norman (2008) diz que é tempo de revisar os paradigmas usados em pesquisas sobre design de interfaces computacionais. Sendo assim, ele propõe que, em razão de nossas características culturais,

> as pesquisas na área devam ser inseridas em um contexto social, para que, dessa forma, possam posicionar os usuários, da maneira que são: detetives, que para compreender o mundo complexo em que vivem, buscam significadores sociais, pistas que indiquem e orientem as ações sobre o mundo NORMAN, op. cit., pg-19, tradução nossa.

Em outras palavras:

> significadores fornecem pistas valiosas sobre a natureza do mundo e das atividades sociais, pois para que possamos funcionar neste mundo tecnológico e social, precisamos desenvolver modelos internos sobre o significado das coisas e como funcionam NORMAN, op. cit., pg-18, tradução nossa.

> Entretanto, os processos que ocorrem mente humana não são diretamente observáveis; são inferidos, no entanto, a partir de observações, classificações e vários tipos de medidas de comportamentos tendo como insumos informações contextuais(GOLDIN, 1998a, pg-140), tradução nossa.

Significados, portanto, derivam de informações que advém de pontos de vista, interações, "*histórias e recursos locais, disponíveis para significação da interface e, em razão disso, tem um alcance para além da formalização*".(HARRISON; TATAR; SENGERS, 2007, pg-05),

tradução nossa. Logo, para que a influência do contexto na interação seja percebida, notadamente, no papel exercido pelos recursos locais, variações físicas devem ser evitadas, uma vez que tais variações poderiam excluir elementos da vivência dos participantes, potencialmente influentes nas suas ações e, por conseguinte, na análise de resultados.

Tanto o uso de variadas expressões da representação quanto potenciais interrelações sobre elas, juntamente com a maneira como sujeitos, examinam, manipulam, relacionam, criam e recriam representações são registros por meio dos quais observadores encontram pistas sobre como os processos ocorrem na mente humana (NORMAN, 2008). Entretanto, segundo Harrison, Tatar e Sengers (2007), dados, resultantes de observações durante processos de construção de significados, oferecem múltiplas e variadas interpretações , sendo necessário, portanto, estabelecer limites para tais interpretações, esclarecendo o objeto da pesquisa e informando, além disso, como ele será observado. Essa visão, decerto, traz impacto tanto na forma de coleta dos dados quanto na sua analise e tratamento HARRISON; TATAR; SENGERS, op. cit.. Em razão disso, os referenciais teóricos, nesta pesquisa, são vistos como norteadores, ou seja, necessários frente à multiplicidade de abordagens voltadas para pesquisas sobre construção de significados; entretanto os resultados não foram, exclusivamente, advindos desses pontos de vistas, outros resultados, decerto, serão advindos do contexto encontrado nos experimentos. Pelo exposto, trata-se de uma pesquisa que

> vê a construção do significado como foco central e adota a postura de que significados são construídos na vivência, frequentemente em colaboração com pessoas em contextos específicos e situações, tornando a interação em si um elemento essencial na construção do sentido HARRISON; TATAR; SENGERS, op. cit., pg-5, tradução nossa.

O delineamento da pesquisa apontam para a um estudo quase-experimental voltado para observar e comparar os resultados oferecidos pelo mesmo participante em momentos diferentes. O quadro 4, a seguir, mostra o plano de análise de dados proposto para identificar tanto os objetivos da pesquisa quanto os caminhos usado para atingi-los. O projeto de extensão, entretanto, não foi colocado neste quadro porque, neste contexto, ele serviu para aproximar o pesquisador dos participantes e apresentá-los a interface, vista na figura 23.

3.3.1 Fluxograma da metodologia

A figura 34, apresenta os passos realizados desde o primeiro contato com a Secretaria de Educação até a realização dos experimentos. O projeto de extensão foi o segundo passo realizado na metodologia. Nos encontros, realizados sempre aos sábados pela manhã, os professores traziam exemplos de provas, como mostrado no APÊNDICE A e mostravam a maneira como os problemas matemáticos eram apresentados em sala de aula. A partir

Quadro 4 – Plano de análise de dados

OBJETIVOS	PROCEDIMENTO METODOLÓGICO	RESULTADOS OBTIDOS (OU ESPERADOS)
Identificar formas de representação ou feedbacks visuais adequadas no uso das interfaces	Revisão da literatura	Sua adequação ao conceito representado.
Analisar os elementos da forma de representação, bem como as possibilidades de manipulação direta desses na interface.	Revisão da literatura Análise qualitativa	Identificar os discursos linguísticos que apresentam elementos do conceito associados à manipulação das formas de representação.
Analisar os protocolos de mouse potencialmente utilizados na manipulação dos elementos.	Análise qualitativa	Identificar os discursos linguísticos que apresentam elementos do conceito associados à manipulação das formas de representação.
Analisar o modo de ofertar feedbacks visuais (formas e cores) na interface do Gerard e sua relação com a conceitualização.	Análise qualitativa	Identificar se houve ou não se houve ou não influência dos feedbacks visuais(cores e formas), bem como da retirada gradativa desses feedbacks visuais no processo de conceitualização.

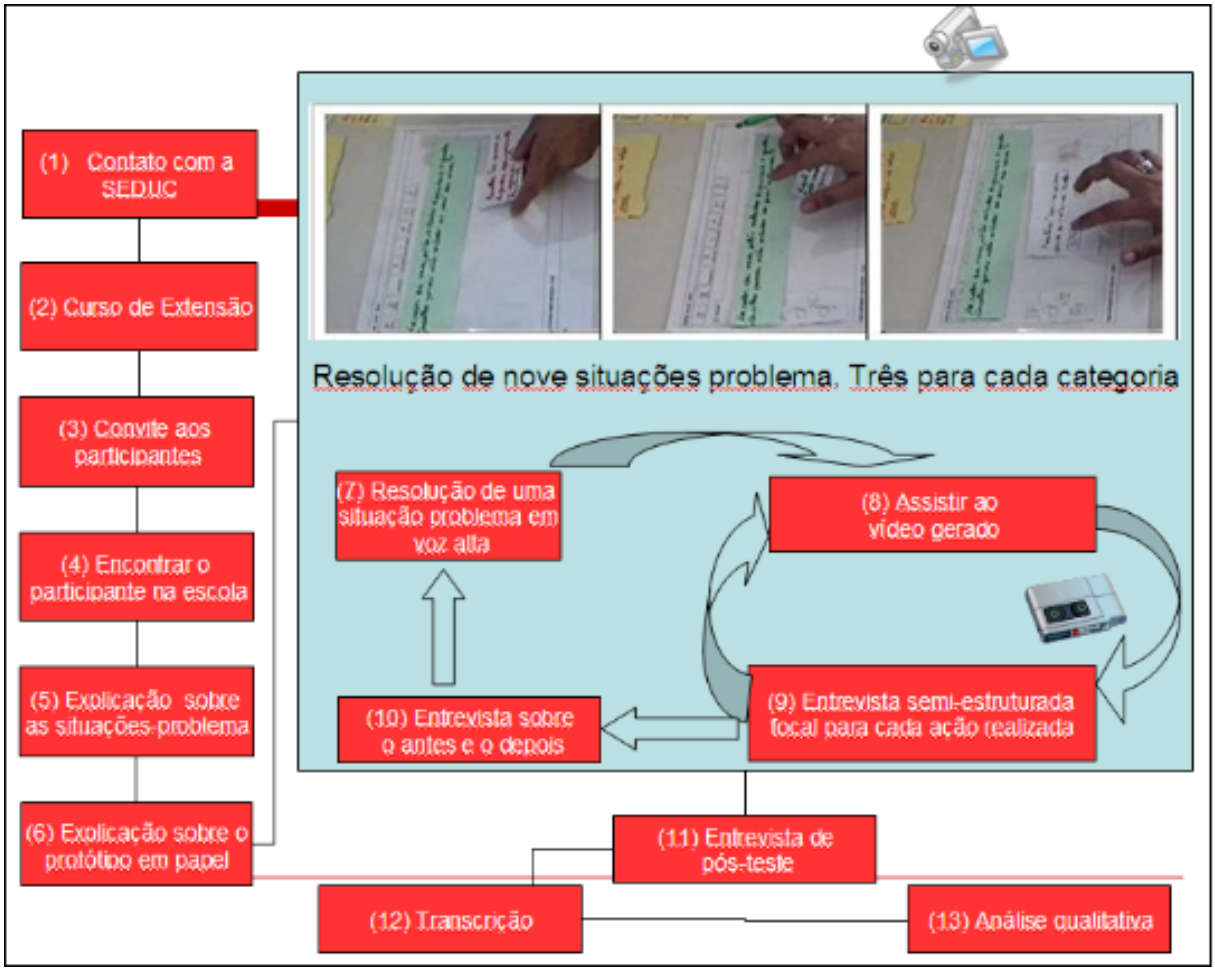
Fonte: Do Autor.

disso, havia discussões sobre o tema comparando-se as atividades matemáticas realizadas em sala de aula com a forma de resolução proposta por Vergnaud (1986) vista no quadro 1. Nos encontros, os professores, tanto resolviam situações-problema sugeridas quanto construíam novas situações. Observou-se, entretanto, que embora não houvesse nenhuma orientação sobre quais situações poderiam construir, a maioria dos problemas construídos pertencia a categoria de **Composição de Medidas** (QUEIROZ et al., 2010). A partir do exposto, resta-nos, portanto, confrontar resultados preliminares obtidos por Queiroz e Gomes (2008), Queiroz et al. (2010), Queiroz et al. (2011) com o aparente estado atual observado durante o experimento para minimizar diferenças entre o projetado e o observado(MACKWORTH, 1965).

3.3.2 Processo de seleção da amostra

Em reunião realizada no dia 06 de julho de 2009, reunidos na SEDUC- Secretaria de Educação de Juazeiro-BA, os coordenadores do projeto escolheram as escolas participantes tomando por base a quantidade de alunos matriculados nas séries iniciais do Ensino Fundamental I, bem como o desempenho desses em matemática. Dessa forma, foram selecionados (25) vinte e cinco professores pertencentes a (05) cinco escolas de Juazeiro BA com dias e horários marcados para realização do curso. Entretanto apesar da secretaria garantir a entrega de certificados de participação; do total de (25) vinte e cinco professoras

Figura 34 – Fluxograma da metodologia executada



Fonte: Do Autor.

selecionadas, (18) dezoito desistiram do curso restando as (07) sete, presentes no quadro 5. As desistentes apontaram a elevada carga de trabalho, bem como a formação continuada já empreendida pela SEDUC e cuja ocorrência era concomitante ao projeto de extensão, como motivos de sua desistência.

3.3.3 Coleta dos dados

A coleta de dados ocorreu mediante a aplicação de *Think-aloud*, de entrevista semiestruturada sobre as situações-problema e gravações de áudio e vídeos. Na técnica de *Think-aloud*, cada participante fala em voz alta enquanto executa uma tarefa especifica. Ele diz o que está olhando, pensando, fazendo e sentindo sobre a tarefa em execução, dessa forma, a descrição de sua vivência é captada, exatamente, no momento em que executa a tarefa. Além disso, Flick (2004) advoga que é mais provável que os pontos de vista dos indivíduos entrevistados sejam expressos em uma situação de entrevista com um planejamento relativamente aberto do que em entrevistas padronizadas ou em questionários. Em

Quadro 5 – **Legenda: PG: Pós-Graduação, G: Graduação, MA: Matemática, EF: Ensino Fundamental, PU: Pública, PV: Privada, ET: Editores de texto (Word, WordPerfect, etc.), PA: Pacotes de apresentação (PowerPoint, etc.), PLA: Planilhas (e-mail, NetMeeting, etc.),BP: Comunicação (salas de bate-papo, e-mail, NetMeeting, etc.),TTD: Transferência e troca de documentos,SE: Software educativo, BD: Bancos de dados (Access, Oracle), B: Browsers (Netscape, Explorer), J: Jogos; C: em casa, E: na escola/universidade,T: no trabalho. PE: Pesquisa**.

Usuário	01	02	03	04	05	06	07
Sexo	F	F	F	F	F	F	F
Idade	30	31	35	34	27	31	35
Escolaridade	G	2º grau	E	2º grau	G	G	G
Formação	PE		PE		MA	PE	
Séries que leciona	1º ao 5º	1º ao 5º	1º ao 5º	1º ao 5º	1º ao 5º	1º ao 5º	1º ao 5º
Tipos de Escola	PV	PU	PU	PU	PU	PU	PU
Tempo de uso do computador (meses)	>4	3 >x>4	>4	<6	2>x>3	2>x>3	2>x>3
Local de uso	C,E,T	C	C,T	C	C	E,T,outros	C
Duração do uso(horas)	2>x>5	x<2	2>x>5	x<2	2>x>5	2>x>5	2>x>5
Finalidade do uso	PE	PE	PE	PE	PE	PE	PE
Ferramentas utilizadas	ET,PA,PLA,BP	ET,BP	ET,BP	ET,PA,SE,BP	ET,PA,BP	ET,PA,PLA,BP	ET,PA,PLA,BP
Ferramentas colaborativas	N	N	N	S	N	N	N

Fonte: Do Autor.

razão disso, entrevistas semiestruturadas têm despertado grande interesse da comunidade científica e são amplamente utilizadas em pesquisas qualitativasFLICK, op. cit..

3.3.3.1 Dados Visuais

Filmar e gravar a resolução de situações-problema permitiu coletar raciocínios matemáticos, potencialmente, mobilizados na ação. Por esse motivo, as situações-problema do quadro 5 e quadro 6, a seguir, são vistas como instrumentos de coleta e, à medida que iam sendo resolvidas, a câmera e o gravador capturavam não só verbalizações, mas também gestos realizados durante a tarefa. O quadro 6 mostra seis (06) situações-problemas do campo aditivo. Na linha um(01), por exemplo, aparece um identificador para a situação, o texto, e a categoria a qual pertence a situação-problema. A seguir, o quadro 7 apresenta a situações-problema do campo multiplicativo.

Quadro 6 – TM: Transformação de Medidas, COP: Comparação de Medidas, CP: Composição de medidas.

ID	Situação-Problema sobre Estruturas Aditivo	Tipo
AP1	João tem 12 petecas e Pedro tem 17. Quantas petecas eles possuem juntos?	CP
AP2	Maria tinha 23 bombons. Ao final do dia, percebeu que só tinha 17 bombons. Quantos bombons Maria comeu durante aquele dia?	TM
AP3	Eu tenho 16 livros, você tem 43. Quantos livros você tem a mais que eu?	COP
AP4	Ana e Maria tem juntas 12 bonecas. Maria tem 04 bonecas, quantas tem Ana?	CP
AP5	Maria tinha 12 bonecas. Ao final do dia, percebeu que só tinha 17 bonecas. Quantos bonecas Maria doou durante aquele dia?	TM
AP6	Eu tenho 10 carrinhos, você tem 20. Quantos carrinhos você tem a mais que eu?	COP

Fonte: Do Autor

Quadro 7 – Legenda: DC- Divisão por cotas, M- Multiplicação, DP- Divisão por partes

ID	Situação-Problema sobre Estruturas Multiplicativas	Tipo
P1	Tenho R$ 12,00 reais e quero comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?	DC
P2	Um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos?	M
P3	Quantos bolos põem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos?	DC
P4	Paguei R$ 12,00 reais por quatro garrafas de vinho. Qual o preço de uma garrafa?	DP
P5	Para fazer sete bolos são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos tema a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo?	DP
P6	Uma garrafa de vinho custa R$ 3,00 reais, quanto custa quatro garrafas?	M

Fonte: Do Autor.

3.4 Procedimento

Nos dias 08, 09, 13, 14, 15, 17, 19, 20 de junho de 2010 foram realizados os experimentos relativos às Estruturas Aditivas e nos dias 02 de janeiro de 2011, 02, 04, 08, 23 de fevereiro de 2011 ocorreram os experimentos relativos às Estruturas Multiplicativas. Quando não havia laboratórios disponíveis para realizar o experimento, íamos para a sala de aula escolhida pela participante. Algumas vezes, os pontos de energia da sala de aula estavam sem funcionar. Nessas ocasiões, ficou claro que dependências de recursos tecnológicos, nesses momentos, iria restringir o acesso a potenciais participantes e, por conseguinte, impedir as ações do projeto.

3.5 Experimento

Na configuração deste experimento, estavam presentes as situações-problema, como exemplificadas nos quadros 2 - Situações-problemas do campo aditivo e quadro 3 - Situações-

problema do campo multiplicativo; um gravador; uma filmadora; folhas de cartolina; um pincel; um conjunto de canetas coloridas; papel A4 colorido; um apagador e folhas de transparências, bem como o protótipo em papel da figura 26 que foi construído com base no software Gerard. Enquanto o participante realizava as tarefas, suas mãos eram filmadas e sua voz gravada. Dessa forma, foi possível mostrar como ocorreu a interação, explicitando, no texto transcrito, além das verbalizações, os gestos que as acompanhavam. Neste contexto, para analisar qualitativamente os dados coletados com a prototipação em papel foi utilizado o software Qualrus (BRENT; SLUSARZ; THOMPSON, 2002a). Cada experimento foi dividio em três partes: **início**, **durante**, **fim** de cada situação-problema e fim do experimento. A seguir a explicação para cada parte.

3.5.0.1 No início

Estavando presentes: um experimentador, um observador, um operador de câmera e um participante, com o participante sentado em uma mesa e tanto o protótipo em papel quanto um gravador disponíveis em seu campo visual, foram dadas explicações sobre o protótipo, sobre as estruturas aditivas, bem como sobre os formulários de consentimento e de identificação do perfil, sendo, além disso, informado que suas mãos seriam filmadas e sua voz seria gravada.

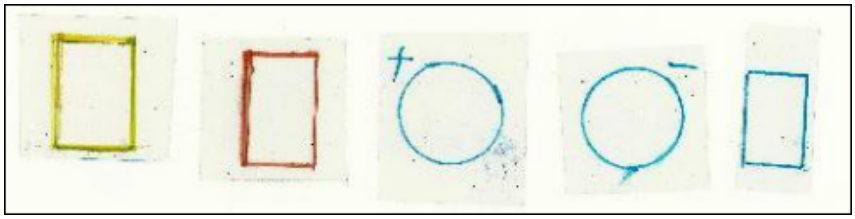
3.5.0.2 Durante

À medida que o participante executava ações para resolver cada situação-problema, falava o que estava pensando sendo gravado e filmado. O experimentador, por sua vez, simulava o comportamento do computador oferecendo respostas e gerando estados na interface decorrentes de cada ação. Ao mesmo tempo, o observador anotava todos as intercorrências e erros cometidos pelo experimentador para, posteriormente, fazer sugestões como presente no ANEXO F- Sugestões feitas pelo observador durante o projeto piloto. O operador de câmera filmava as mãos do participante e, para evitar perda de informação, analisava o melhor ângulo de filmagem, garantindo, por conseguinte, o bom aproveitamento das imagens durante as transcrições. Ao final da resolução de cada problema, os vídeos, especificamente sobre cada ação, eram mostrados ao participante, que, por sua vez, oferecia respostas para as perguntas presentes no ANEXO D. Perguntas realizadas após tarefas sobre cada ação, anteriormente, realizada.

3.5.0.3 No final de cada situação-problema

No final de cada situação-problema, cada participante respondeu sobre seu conhecimento antes e depois da vivência. Exemplos dessas perguntas estão no ANEXO C. - Após a resolução de problema. Nessas ocasiões eles foram estimulados a pensar sobre todo o processo e como perceberam os elementos antes e depois da vivência.

Figura 35 – Transparências marcadas para realçar elementos do texto



Fonte: O autor

3.5.0.4 No final do experimento

No final das situações-problemas presentes no quadro 6 e quadro 7, cada participante respondeu as perguntas do ANEXO C. - Após a resolução de problema, sobre sua experiência com a interface e foram estimulados tanto a lembrar de suas impressões ao verem a interface pela primeira vez quanto a dizer suas impressões gerais sobre os conceitos matemáticos potencialmente identificados no uso do software. Além disso, cada participante resolveu essa quantidade de situações de duas maneiras: **com ajudas** e **sem ajudas**, sendo, portanto, a quantidade total foi multiplicada por dois (02). Desta forma, foram coletadas explicações sobre os motivos para as ações, sejam essas com ou sem ajuda. Nesta configuração, cada experimento demorou aproximadamente duas (02) horas. Os quadrados e círculos da figura 35 foram utilizados para oferecer ajuda, durante a construção do diagrama. Os números no texto foram marcados com formas e cores iguais aquelas presentes no diagrama, como visto na figura 59. As transparências, portanto, tinham duas finalidades: proteger o protótipo, uma vez que o usuário escrevia em cima da transparência e não na cartolina, e servir como elemento de realce como visto na figura 35.

3.5.1 Método de análise

A interpretação é o cerne da pesquisa qualitativa (FLICK, 2004). Logo, de posse das filmagens, gravações e entrevistas, os dados coletados foram transcritos e, em seguida, interpretados tomando por base as seguintes perguntas presentes em Ibid.:

- O quê? Sobre o que se fala aqui? Qual o fenômeno mencionado?
- Quem? Que pessoas ou atores estão envolvidos? Que papéis eles desempenham?
- Como eles interagem?
- Como? Quais os aspectos do fenômeno são mencionados (ou não são mencionados)?
- Quando? Por quanto tempo? Onde? Tempo, curso e localização.
- Quanto? Com que força? Aspectos relacionados à intensidade.

- Por quê? Quais os motivos que foram apresentados ou que podem ser reconstruídos?
- Para quê? Com qual intenção, com que finalidade?
- Através de quê? Meios, táticas e estratégias para se atingir o objetivo.

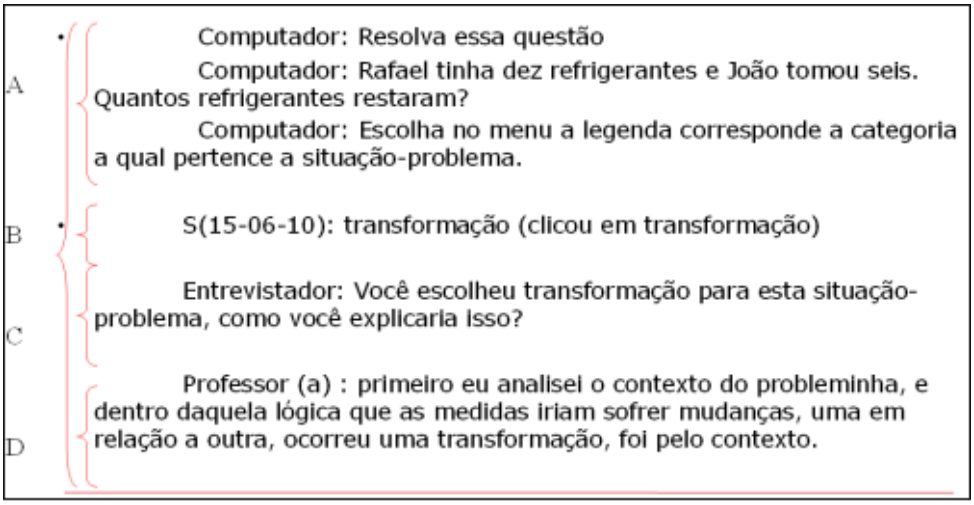
Para realizar uma codificação temática como proposta por Ibid., primeiramente, o texto original foi reduzido por meio da definição de códigos, palavras que apresentam prévio significado no âmbito da pesquisa. Entretanto, tomando por base que segundo Gérard (1998), objetos matemáticos se diferenciam tanto a partir de um ponto de vista conceitual quanto a partir de um ponto de vista linguístico.

3.6 Resultados

Nesta pesquisa, a aprendizagem de conceitos ocorre mediante mudança conceitual proposta por Gérard (1998), que se refere a percepção de novos elementos constitutivos da representação ou a percepção dos mesmos exercendo, entretanto, papeis diferentes. Essa foi, portanto, a base para a análise qualitativa utilizada. Por exemplo, os verbos: **ter** e **possuir**, tanto no passado quanto no presente discriminam o **estado inicial** e o **estado fina**l de uma transformação, já advérbios, segundo Ibid., tais como: **agora**, **antes** ou **depois** possuem status de **organizadores da informação** e, só após aprendizes vivenciarem algumas experiências na resolução de situações-problema, é que surgem palavras como: **estado**, **transformação** e **incremento**. Por esse motivo, observam-se as mudanças ocorridas no discurso dos participantes para identificar o processo de construção do conceito. A seguir, um exemplo de análise qualitativa com trechos advindos desta pesquisa; entretanto realizada com base no exemplo oferecido por GÉRARD, op. cit.

1. O número (12) doze é a quantidade.
2. O número (12) doze é a quantidade de pacotes e elementos que eu posso comprar de elementos/caramelos que eu posso comprar com doze reais.
3. O número quatro é a alteração da quantidade.
4. Um número é uma quantidade.
5. Eu via o numero 17(dezessete) como uma base, então, eu só fiz arrastar pra base do diagrama.
6. O 17(dezessete) passou pra mim a ser uma parte e não uma base de onde eu ia partir.

Figura 36 – Unidade de análise



Com base em Gérard (1998), vemos que a sentença 1 foi construída com um predicado[1] unário[2]. Na 2 e 3, um predicado ternário[3]. Na 4, é unário, entretanto generaliza a primeira e a segunda sentenças. Na 5 sentença, o usuário identifica que o elemento denominado de **base** tanto ocorre no diagrama quanto ocorre do texto. Além disso, na sentença 6, o número 17(dezessete) assumiu outro papel no cenário da resolução. na senteça 5, ele representava a base da comparação, na 6, passou a representar uma parte presente numa situação aditiva de composição de medidas.

3.6.1 Unidade de Análise

Como visto na 36, a unidade de análise é formada por (04) quatro ações menores: (A)as ações do computador; (B)ação do usuário; (C)pergunta do pesquisador; (D)resposta do usuário. Esses itens, como vistos na figura 36, a seguir, bem como seus potenciais relacionamentos, serão analisados durante o tratamento dos dados. Na parte (A) da figura 36, um evento do computador inicia a ação solicitando ao usuário que resolva a situação-problema descrita. Na parte (B), o usuário, seguindo o que foi solicitado, realiza uma operação/ação no computador escolhendo a categoria a qual pertence a situação-problema. Em (C), o pesquisador faz uma pergunta sobre os motivos da ação realizada. Em seguida, na parte (D) o usuário explica os motivos. Nesse formato, na figura 36 aparecem quatro partes:

- (A): conjunto limitado de ações realizadas pelo computador, ou seja, textos das situações-problema, mensagens pré-formatadas e feedback.

[1] um predicado é uma declaração que deve ser verdadeira ou falsa dependendo do valor de suas variáveis.
[2] um predicado que recebe um operando.
[3] um predicado que relaciona três operandos.

- (B): conjunto de ações realizadas pelo usuário, quais sejam: selecionar os elementos no texto, caminho, arrastá-los, posicioná-lo no diagrama, inserir resposta numérica ou clicar nos botões e menus dispostos na interface.

- (C): perguntas realizadas pelo pesquisador. Ao todo, foram 29 perguntas, como vistas nos ANEXO C, ANEXO D e ANEXO E as quais versaram sobre estratégia de resolução, motivos de escolha, significado de elementos (números e figuras) e conhecimentos antes e depois da vivência.

- (D): respostas do usuário. Esse conjunto apresenta muitas possibilidades e nele foram identificados os elementos do conceito, organizadores da informação, uso de palavras que denotam mudança de estado, bem como os relacionamentos entre os elementos da A, B, C e D.

Ao todo, para as **Estruturas Aditivas**, foram obtidos (09) novo protocolos verbais, cada um com aproximadamente (64) sessenta e quatro segmentos em cada arquivo, totalizando (quinhentos e noventa) 590 unidades de análise. Para as **Multiplicativas** foram gerados (07) sete protocolos verbais com aproximadamente (64) sessenta e quatro segmentos em cada arquivo, totalizando (trezentos e trinta e cinco) 335 unidades de análise. Os resultados advindos da análise de dados serão apresentados em quatro (04) estudos mostrados nos capítulos, 4, 5, 6 e 7 .

4 Expressões da representação utilizadas para apoiar o ensino das estruturas aditivas e multiplicativas

4.1 Introdução

A atividade científica é um protótipo de atividade pertencente a classe das atividades que pressupõem o uso de modelagem matemática, que, por sua vez, colabora tanto para entender as pesquisas científicas quanto na exposição de resultados(HATANO, 1997). Entretanto, embora a construção de modelos matemáticos abrigue relações com atividades voltadas para pesquisas científicas convém ressaltar que as mudanças conceituais que caracterizam a Ciência são diferentes daqueles que caracterizam a Matemática, ou seja:

> as mudanças revolucionárias nas ciências são caracterizadas pela substituição dos conhecimentos antigos pelos novos conhecimentos, enquanto na Matemática as mudanças conceituais são caracterizadas pela retenção da estrutura antiga como uma subestrutura do conhecimento novo.(GREER, 2004, pg-541), tradução nossa.

Durante a modelagem matemática são feitas anotações pessoais e ou consensuais; são feitos desenhos, utilizados gráficos, figuras, caracteres, equações, e toda uma sorte de símbolos, utilizados para deixar marcas em pontos significativos do caminho, refletindo, além disso, decisões tomadas, pensamentos, ideias, reflesões e conclusões. Ou seja, informações contextuais decorrentes do curso da tarefa, no qual estavam presentes elementos do mundo material em interação com a dimensão cognitiva(KAPUT, 1994; GOLDIN; KAPUT, 1996). Na matemática, portanto, o conhecimento evolui mediante mudanças conceituais decorrentes de reestruturações conceituais(GREER, 2004). Por esse motivo, tanto para realizar pesquisas sobre matemática quanto para ensinar matemática, deveriam ser observadas as mudanças conceituais, potencialmente ocorridas na mente dos aprendizes, durante o curso da tarefa GREER, op. cit..

Entretanto, segundo o mesmo autor, o processo instrucional, além de oferecer um conjunto limitado de exemplos, dá pouca atenção às mudanças conceituais potencialmente ocorridas, proporcionando, por conseguinte, que os aprendizes desenvolvam concepções limitadas sobre os conceitos estudados GREER, op. cit.. Segundo Goldin (1998a), Kaput, Noss e Hoyles (2002), recuperar o contexto da resolução de problemas pode, portanto, oferecer informações valiosas sobre possíveis interferências desse na mente humana; entretanto , para recuperá-lo, é preciso que experiências vivenciadas tenham sido registrada em algum meio externo e, nesse sentido, Wessels (2006) aponta o papel fundamental

exercido tanto pelas expressões da representação, definida na seção 1.4, quanto por seus elementos constitutivos, uma vez que representações abrigam relações com a mente humana e, estando presentes na construção de modelos matemáticos, podem fornecer pistas sobre potenciais mudanças conceituais ocorridas na mente dos aprendizes, bem como sobre os elementos externos que contribuíram, ou não, no processo(GOLDIN, 1998a; KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002; WESSELS, 2006).

4.1.1 Representações visuais sobre matemática

Existem diversas perspectivas que influenciaram na definição do conceito de representação (WESSELS, 2006); entretanto,Goldin (1998a) unificou tais perspectivas denominando-as como "*sistema de representação externa, o qual incluem os símbolos falados, escritos, figuras estáticas, modelos manipulados bem como as situações do mundo real*" (GOLDIN, 1998a, pg-143), tradução nossa.

Nessa mesma linha, Gérard (1998, pg-167), tradução nossa, diz que

> a representação é um conceito difícil; entretanto existem duas razões simples para considerá-la como assunto de estudos científicos: o primeiro é que todas as representações de experiências humanas podem ser vistas como um fluxo de imagens internas, gestos e palavras; o segundo, é que as palavras e símbolos são utilizados para comunicar sem, contudo, referir-se diretamente à realidade, mas a uma representação dela: objetos, relações, propriedades, processos, ações e construtos GÉRARD, op. cit., pg-167, tradução nossa.

Continuando, Vergnaud (2009) propõe que o ato de representar é um processo dinâmico, no qual estão incluídos:

> o fluxo da consciência, a percepção despertada que dá a oportunidade de evocar os objetos na ausência dos mesmos; os invariantes operatórios, ou seja, o sistema de categorias qualitativas e relacionais sobre os objetos; o sistema de significado e significante e a organização hierárquica dos esquemas os quais propõem e organizam a atividade(VERGNAUD, 2009)

. Os significantes, por seu turno,

> são notações materiais tanto aparatos físicos quanto símbolos – não somente alfa-numéricos, mas também figuras e diagramas. Elas podem ser consensuais, tais como gráficos e linguagem natural, ou idiossincráticos tais como marcas pessoais. Em ambos os casos, servem para lermos ou interpretarmos, para escrevermos ou desenharmos(KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002, pg-56), tradução nossa)

Tanto Gérard (1998); Vergnaud (2009) quanto Kaput, Noss e Hoyles (2002) analisam expressões da representação como parte de um processo dinâmico, são, portanto, os atos de interpretação oferecidos por um intérprete e balizados em seus conhecimentos prévios que tornam possível a existência de uma representação. Por esse motivo Kaput, (2002) diz que

na ausência de uma interpretação oferecida por um intérprete, não existe representação. Por outro lado, Goldin (1998a) não restringe a ideia de sistema de representação exclusivamente para situações nas quais seres humanos estabelecem as estruturas ou relações simbólicas. Por exemplo, a estrutura semântica que codificam os aminoácidos existem independentemente da interpretação humana; entretanto a descrição desses fenômenos, por seu turno, faz parte da atividade científica humana(GOLDIN, 1998b).

Por exemplo, existem diversas expressões da representação fortemente conectadas a conceitos matemáticos (GAGATSIS; ELIA, 2005). O caso dos gráficos utilizados para representar funções é um exemplo disso; a conexão entre tais elementos evidencia-se a tal ponto, que na ausência dos gráficos tornar-se difícil entender funções Ibid.. Neste trabalho, estamos particularmente interessados em expressões da representação amplamente utilizadas para ensinar Estruturas Aditiva e Multiplicativas(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007, 2007; GAGATSIS; ELIA, 2005; GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004; SELVA, 2004) .

4.1.2 Estruturas Aditivas e Multiplicativas

Em Magina e al. (2001) encontramos quatro exemplos de problemas matemáticos apresentados no Ensino Fundamental nas séries iniciais:

1. Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas quatro garotos e sete garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa?

2. Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?

3. Carlos tem 4 anos. Maria é sete anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria?

Analisando cada caso, vemos que na situação-problema 1 é pedido o valor correspondente a união de dois conjuntos. Sendo assim, identificam-se duas PARTES: uma, composta pelo conjunto de garotos com cardinalidade (04), e outra, composta pelo conjunto de garotas com cardinalidade (07). Além dessas, identifica-se um elemento denominado TODO (conjunto formado pela união das partes). A esse tipo de situação, na qual existe uma quantidade de **partes** que juntas formam um **todo**, Vergnaud, (1986) denomina de **Composição de Medidas.**

No exemplo 2, existe uma quantidade inicial desconhecida, por meio de uma compra no valor R$4,00, essa quantidade foi modificada resultando no valor de R$ 7,00. Sabendo-se dessas informações, deseja-se obter o valor inicial do conjunto. Nesse cenário, identifica-se o valor de R$4,00 reais, correspondente ao valor relativo; o estado final, no valor de R$7,00

sete reais, correspondente ao dinheiro que sobrou no bolso após a compra. A partir disso, está sendo pedido o estado inicial, o qual, nessa situação-problema, é denominado de item desconhecido. Essa situação é do tipo **Transformação Aplicada a uma Medida**.

No exemplo 3, a narrativa envolve duas quantidades de existência concomitante e deseja-se compará-las. Para tanto, identifica-se a idade de Carlos, (04) quatro anos, como o valor de referência, ou seja, o **referido**, aquele a partir do qual será feita a comparação; a idade de Maria, (07) sete anos, como o **referendo**, aquele que se refere ao referido, e o número relativo, correspondente a diferença entre o **referido** e o **referendo**. Esse tipo de situação é denominada de **Comparação de Medidas**. Os números utilizados como referido e como referendo representam quantidades, logo, pertencem ao conjunto dos números naturais, já o número correspondente ao valor relativo representa uma relação, logo, pertence ao conjunto dos inteiros.

A operação numérica para as situações-problema 1, 2 e 3 é, portanto, 4 + 7=11; entretanto tal representação não é suficiente para fazer perceber as diferenças qualitativas entre as situações-problema (VERGNAUD, 1986). Representações algébricas veiculam um conjunto limitado de significações matemáticas e, em razão disso, não permitem distinguir entre representação de problemas e representação de soluções, escondendo, portanto, relações qualitativas potencialmente existentes nas situações-problema(GÉRARD, 1998). Em razão disso, "*Uma representação algébrica faz perder muita informação, porque identifica sob o mesmo sinal (+,-,=) conceitos elementares relativamente diferentes uns dos outros*"(VERGNAUD, 1986, pg-83). Por exemplo, a representação algébrica 4+7 é a mesma para os três tipos de situações-problema 1, 2 e 3, logo, não evidencia nem distingue o modelo qualitativo de cada situação. Fazendo surgir, portanto, lacunas de compreensão, as quais são fonte de desníveis entre significantes e significados VERGNAUD, op. cit..

4.1.3 Situações multiplicativas simples: multiplicação, divisão por partes, divisão por cotas

Multiplicação: um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos?

Nesse contexto, desconhece-se o valor total e conhece-se o número de partes, bem como o valor de cada parte. Nesse caso, o valor total é encontrado multiplicando-se o número de partes pelo valor de cada parte.

Divisão por partes: para fazer sete bolos, são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos têm a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo? Desconhece-se o valor de cada parte e conhece-se o valor total e o número de partes. Nesse caso, o valor de cada parte é encontrado dividindo-se o valor total pelo número de partes.

Divisão por cotas: quantos bolos podem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos? Desconhece-se o número de partes e conhece-se o valor total e o valor de cada parte. Nesse caso, o número de partes é encontrado dividindo-se o valor total pelo valor da cada parte.

À luz dessas discussões anterirores fazemos a seguinte pergunta: quais expressões da representação são utilizadas para apoiar ensino de Estruturas aditivas e multiplicativas?

4.2 Metodologia

Na revisão da literatura, escolheram-se artigos, teses e dissertações na área de Estilo de Interação, *Visual Mathematical Representations* e, também, na área de Psicologia da Educação Matemática utilizando-se as seguintes palavras-chave: *Mathematical Representations, Signification in conceptualizing*; *Aditicive and Multiplicative Estruture.* Na seleção dos artigos, foi considerado como tema comum, o uso de representações visuais na construção de conhecimento sobre conceitos matemáticos; entretanto, não foram impostas restrições quanto ao uso de representações exclusivamente em interfaces computacionais, uma vez que o uso de imagens, figuras, tabelas, gráficos e outras representações é comum nas salas de aula dos professores de Matemática e, sendo assim, nossa pesquisa poderia se beneficiar de resultados de experimentos que ocorreram em outros contextos que não apenas aqueles relacionados ao uso de aplicações educativas no computador.

4.3 Resultados

Como visto na figura 25, a conceitualização, tanto para Estruturas Aditivas quanto para Multiplicativas, ocorre por meio da resolução de variadas

1. situações-problema, a qual favorece a percepção de invariantes operatórios
2. invariantes operatórios são proposiçõe sobre sobre ações e sobre conceitos específicos, mediada por representações.
3. representações metafóricas de conceitos específicos (VERGNAUD, 1988; VERGNAUD, 1986; GÉRARD, 1998). medeiam relações entre 1 e 2

Neste contexto, as situações-problema 1 são textos com estórias, dentro das quais são inseridos problemas matemáticos, os quais, em função de conter elementos presentes nas ações cotidianas do aprendiz, como carrinhos, bolinhas e bonecas, estima-se que se tornem mais significativos para ele. Os invariantes operatórios 2, por seu turno, são proposições sobre o domínio matemático presente na situação-problema e as expressões da representação 3 contribuem na percepção dos invariantes, a qual amplia o significado dos

conceitos enraizados nas situações-problemas (GÉRARD, 1998). Sendo assim, à medida que os aprendizes resolvem variadas situações-problema, mediados por expressões da representação, estima-se que os invariantes operatórios, presentes nas situações-problema, sejam percebidos pelo aprendiz. Os vários trabalhos correlatos sobre o uso de expressões da representação visual, voltados para situações aditivas e multiplicativas, abordam o tema a partir de diferentes perspectivas teóricas. Entretanto, independentemente de perspectivas teóricas, focamos nosso olhar, especificamente, sobre o papel exercido por expressões da representação para representar conceitos específicos, bem como sobre potenciais influencias do seu uso.

4.3.1 Conceitos presentes nas Estruturas Aditivas

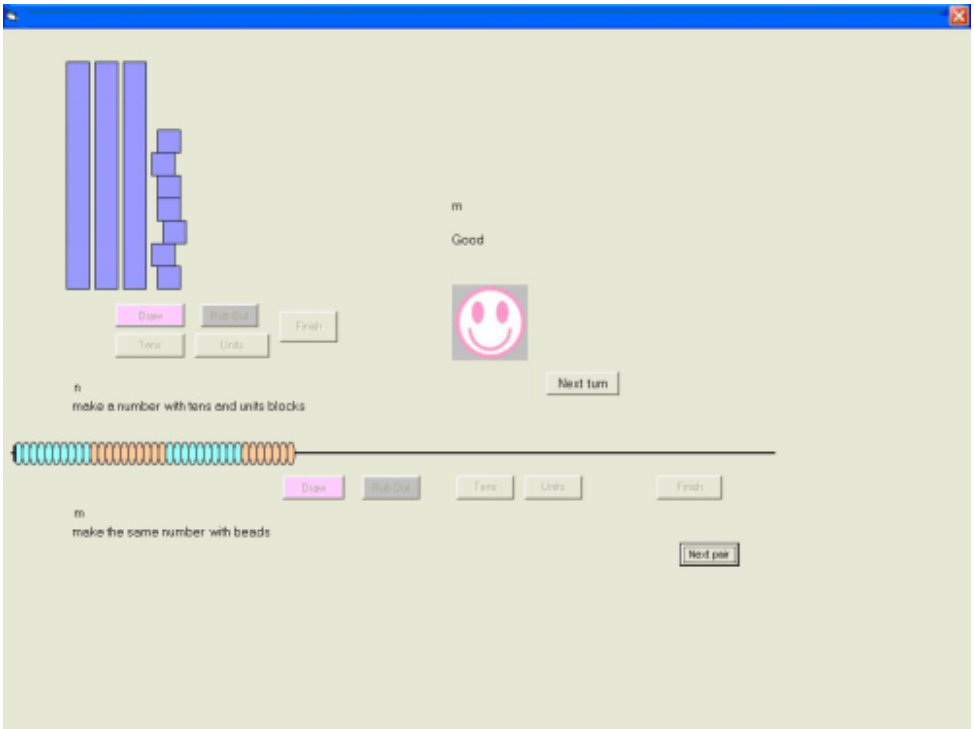
SegundoMagina e al. (2001), na resolução de situações aditivas são mobilizados o conceito de número e sua relação com conjuntos; o conceito de medidas (ex: 5 é maior que 2); o conceito de adição; de subtração; de temporalidade (tinha = passado, tem agora = presente), contagem (depois do 5 vem o 6, depois o 7); de composição de medidas; de transformação de medidas e o de comparação de medidas. Além desses, Vergnaud (1986), ainda cita o conceito de inversão, operação unária, operação binária, de número natural, de número relativo, de função e de abscissa. Segundo Ibid. existem seis tipos de categorias para as situações aditivas: **Composição de medidas; Transformação de medidas; Comparação de medidas; Composição de transformações; Transformação de relações; Composição de relações**. Logo, cada situação-problema pode envolver diferentes problemas matemáticos. Nesse estudo, foi observado o processo de resolução da **Composição de medidas; Transformação de medidas; Comparação de medidas;**

Kamii (1983, pg-14) citando Piaget, diferencia três tipos de *"conhecimentos: o físico, o lógico-matemático e o conhecimento social ou convencional"* . O conhecimento físico é aquele percebido de maneira evidente, como por exemplo, cor e peso. Está presente nos objetos e, portanto, pode ser percebido pela mera observação. Já o conhecimento lógico-matemático é aquele percebido por meio de uma relação entre os objetos presentes no mundo. Por exemplo, Ibid. diz que a diferença entre as cores presentes em plaquetas, só é percebida pelas crianças mediante a observação das relações entre plaquetas . O mesmo acontece com o conceito de número, "*ele é uma relação criada mentalmente por cada individuo*" KAMII, op. cit., pg-15. Em razão disso, a autora diz que para crianças construírem o conceito de número é necessário colocar todos os tipos de conteúdos (objetos, eventos, ações) dentro de todos os tipos de relações KAMII, op. cit., pg-18.

4.3.2 Conceito de número, contagem e medida

Harries e Suggate (2006) relataram uma experiência cujos resultados apontaram que as respostas mais corretas sobre o conceito de número vieram por meio de contadores,

Figura 37 – Representações para ensinar o conceito de número

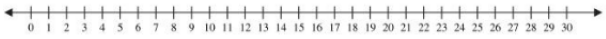


Fonte: (HARRIES; SUGGATE, 2006)

que, segundoIbid.são os recursos físicos mais comuns para realizar a operações de contagem. Enquanto que, as mais erradas vieram no uso da linha numerada. Uma linha numerada, como pode ser visto na figura 38, é uma linha reta na qual cada ponto corresponde a um número real; entretanto apenas os números inteiros são imediatamente observáveis. Por exemplo, do ponto (0) ao ponto (1) vê-se apenas dois números [0,1] entretanto existe, entre tais números, um conjunto infinito limitado composto por números presentes entre o zero 0 e o um 1. No experimento de Ibid. havia dois tipos de linha numerada: a linha 2 apresentava a relação entre unidades e dezenas de maneira explícita enquanto que na linha 1, tal relação não foi explicitada. O desempenho dos alunos foi melhor na linha 2 comparativamente à linha 1 que não explicitava essa relação entre unidades e dezenas. Em função disso, Ibid. acreditaram que o melhor desempenho dos alunos com a linha 1 tenha sido decorrentes dessa explicitação de unidades e dezenas. A figura 37 apresenta as representações utilizadas no experimento de HARRIES; SUGGATE, op. cit..

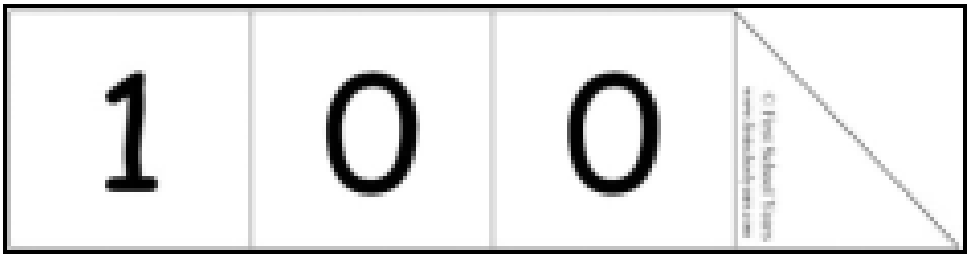
Como pode ser visto na figura 37, os alunos foram estimulados a representar números com diferentes modos de representação, os quais, além de favorecer a explicitação de aspectos diferentes do mesmo conceito, ampliam a capacidade interpretativa dos alunos. Nesse contexto, diferentes modos de representação conduziram, por conseguinte, a erros diferentes e, por esse motivo, indicaram aspectos do conceito para os quais foram apresentadas mais dificuldade. Ou ainda, a capacidade de expressividade de determinada representação interfere na percepção tanto dos conceitos quanto nas relações potencialmente

Figura 38 – Linha Numerada



Fonte: (ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007)

Figura 39 – Cartão de seta

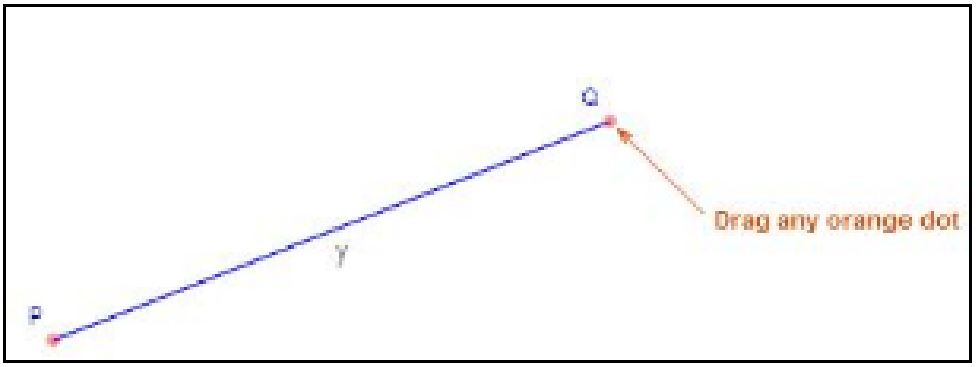


Fonte: (FIRSTSCHOOL, 2010)

existentes sobre eles. Por exemplo, erros cometidos no uso da linha numerada do tipo (01), podem ter sido decorrente da sua pouca expressividade dos elementos presentes no conceito. Em suas discussões, Ibid. sugerem que dificuldades com a linha numerada repousam no fato que existem duas operações que devem ser executadas sobre a linha: marcar os pontos e executar os ciclos, e, na direção contrária, para interpretar o ciclo é preciso ler os pontos marcados. No que tange ao papel exercido por cada número, relacionamentos, potencialmente existentes entre o elemento que representava a dezena e o elemento que representava a unidade, ficaram mais evidentes quando foi usada a contagem de blocos do que quando foi usado o cartão de setas. Segundo Ibid. essa inabilidade com o cartão de seta, visto na figura 39 pode está relacionada com a falta de habilidade com a notação posicional. Os participantes informaram que para efetuar ações de contagem usaram dois métodos: (1) contagem de unidade a unidade, seguida de dezena a dezena e (2) contagem de dezena em dezena, seguida de unidade a unidade. O segundo método apresentou maior percentual de acerto. Segundo Ibid., os motivos dos erros para o caso (1) um, repousam no desconhecimento conceitual sobre agrupamento, que foi perceptível durante a contagem de valores que se diferencia da contagem de unidades pelo fato de necessitar dos alunos a percepção de que existe um agrupamento no valor mostrado.

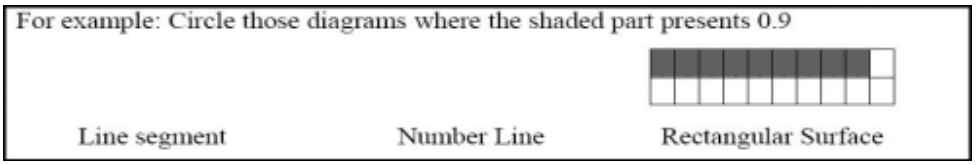
Ibid. observaram que dentre aqueles que acertaram mais, prevaleceu a estratégia de contagem de (10) dez em (10) dez, enquanto que para aqueles que mais erraram, prevaleceu a estratégia de contagem de (01) um em (01) um. As expressões da representação usadas na interface, bem como a escolaridade influenciaram nos percentuais de erro(HARRIES; SUGGATE, 2006). Por exemplo, acertos prevaleceram quando a foi escolhida a forma figurativa; entretanto esse fato, segundo os Ibid., não representa compreensão do conceito pois a escolha por tal representação parece ter ocorrido por razões associadas ao pouco esforço despendido no seu uso.

Figura 40 – Segmento de linha



Fonte: (MATHOPENREF, 2010)

Figura 41 – Exemplo do uso da superfície retangular

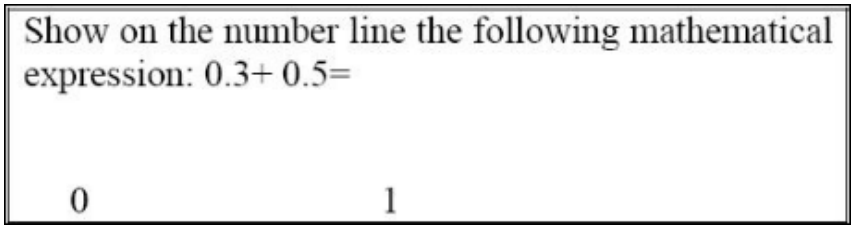


Fonte: (MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004)

4.3.3 Números decimais

De acordo com Michaelidou, Gagatsis e Pitta-Pantazi (2004), operações sobre número decimais podem ser representadas como operações sobre um segmento de linha. Sendo assim, Ibid. conduziram uma pesquisa na qual os participantes resolveram situações com diferentes formas de representação. As perguntas que motivaram tal estudo versavam sobre a: (1) habilidade dos estudantes em reconhecer números decimais em diferentes sistemas de representação; (2) a flexibilidade dos estudantes em manipular números decimais dentro de um dado sistema de representação; (3) a habilidade dos estudantes em transladar números decimais de um sistema de representação para outro; (4) bem como identificar o relacionamento das respostas das crianças nas tarefas de reconhecimento, representação e translação. Para responder esses questionamentos, os autores conduziram um estudo sobre o uso da linha numerada realizando um teste com três tarefas: (1) reconhecimento do conceito, (2) representação do conceito e (3) translação de conceitos. No método, aplicaram-se três testes para 120 crianças com 12 anos de idade. Ibid. perceberam que tanto a tarefa de reconhecimento do conceito quanto a tarefa de representação do conceito foi melhor realizada com a superfície retangular, vista na figura 41. Já nas tarefas de translação, os resultados foram melhores quando a translação ocorreu da linha numerada para o sistema simbólico do que do sistema simbólico para a linha numerada. Segundo os autores, isso pode estar associado à familiaridade das crianças com a régua. A figura 42, os aprendizes foram estimulados a representar a operação 0,3 + 0,5 no intervalo entre [0,1].

Figura 42 – Exemplo do uso da linha numerada



Fonte: (MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004)

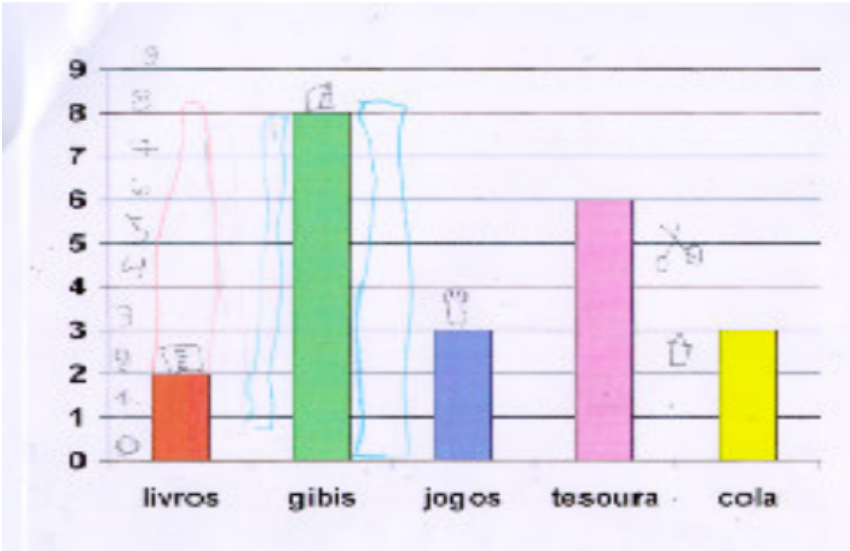
Michaelidou, Gagatsis e Pitta-Pantazi (2004) observaram um baixo percentual de sucesso nas tarefas de reconhecimento e translação de conceitos. Além disso, a tarefa de reconhecimento de conceitos foi realizada no uso de uma linha numerada, que apresentava elementos distraidores, como por exemplo, linhas numeradas com espaços maiores do que (um) 1. Esse fato, segundo os autores, pode ter influenciado o melhor desempenho observado nas tarefas de representação de conceitos. Além dos resultados observados na realização das tarefas de reconhecimento, representação e translação dos conceitos, os estudantes apresentaram dificuldades em tarefas de adição de números decimais. Isso indica que a tarefa de adição, especificamente em procedimentos de translação sobre a linha numerada, pressupõe, não só, habilidade para realizar operações de adição, mas também, para representar operandos e operações sobre linha numerada, bem como manipular e interpretar informações representadas na linha numerada. Outro elemento influenciador dos resultados da operação de adição foi o número de dígitos dos operandos, quanto maior a quantidade de dígitos, maior a quantidade de erros.

Para tratar os mesmos conceitos, os estudantes apresentaram diferentes habilidades em diferentes representações. Ou seja, os estudantes não viram as diferentes expressões da representação como expressões do mesmo conceito. Disso, vê-se que representações para números decimais não são suficientemente desenvolvidas e, portanto, não consistem de um todo unificado MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, op. cit.. À vista disso, os autores identificaram o fenômeno da modularização do conhecimento, no qual, um mesmo conceito foi visualizado pelos estudantes de maneira modularizada, na medida em que foram apresentadas habilidades diferentes frente à manipulação de diferentes expressões da representação. Os diferentes desempenhos, entre modos de representação, indicaram que os estudantes operam melhor com diferentes conceitos do que com diferentes modos do mesmo conceito MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, op. cit..

4.3.4 Conceito de Comparação de Medidas

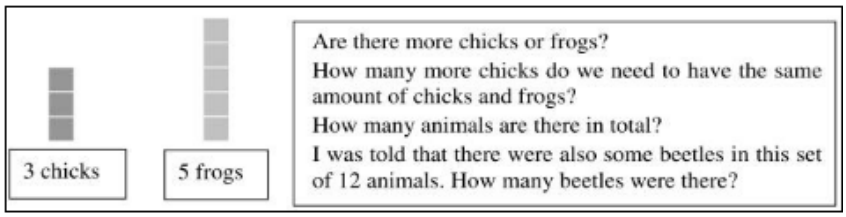
Segundo (SELVA; FALCAO; NUNES, 2005, pg-161) "*os gráficos cartesianos sejam utilizados como suporte no trato com situações-problema que envolvem quantidade e suas relações*" , tradução nossa; entretanto, ainda são encontradas dificuldades com tais

Figura 43 – Desenhando barras sobre as outras



Fonte: (SELVA; FALCAO; NUNES, 2005)

Figura 44 – Comparação com gráfico de barras com quantidades



Fonte: (SELVA; FALCAO; NUNES, 2005)

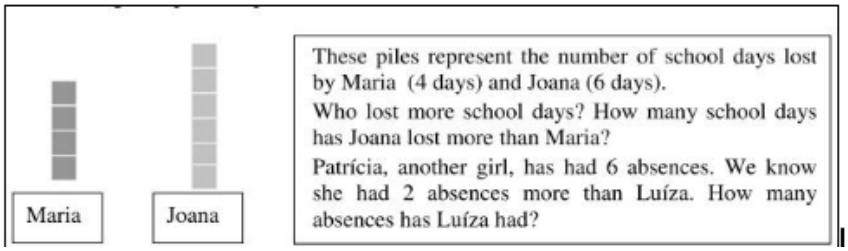
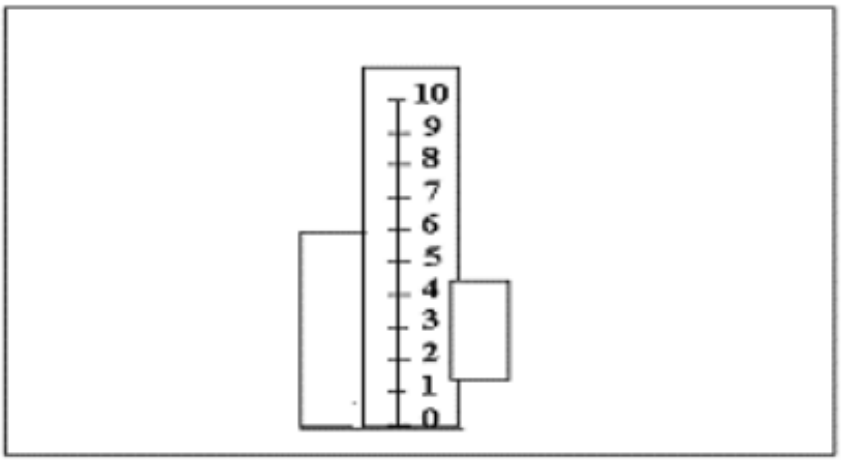


Figura 45 – Comparação com gráfico de barras com nomes

Fonte: (SELVA; FALCAO; NUNES, 2005)

representações SELVA; FALCAO; NUNES, op. cit.. Em razão disso, Ibid. realizaram uma pesquisa na qual foi adotada uma abordagem didática no uso de gráficos de barras. Como resultado, foi mostrado que a soma de quantidades foi realizada redesenhando as barras, umas barra sobre as outras como visto na figura 43; entretanto, nesse redesenho, a quantidade original da barra desenhada era perdida. Para resolver situações do tipo comparação de medidas com gráfico de barras, visto na figura 44 e figura 45 , algumas crianças posicionavam as barras em pontos de partida diferentes do ponto “zero” do

Figura 46 – Iniciando em diferentes pontos de partida



Fonte: (SELVA; FALCAO; NUNES, 2005)

gráfico, como pode ser visto na 46 e, por causa disso, a tarefa ficou comprometida SELVA; FALCAO; NUNES, op. cit..

Na percepção de quantidades crescentes, os alunos mostraram que entenderam o padrão de crescimento fazendo desenhos das barras em sequencia no gráfico. Entretanto, durante o desenho das barras sucessoras e, após certa quantidade de barras desenhadas, os alunos esqueceram tal padrão. Por esse motivo, Ibid. propuseram tarefas realizadas com tijolos, como antecessoras da construção de gráficos de barras. A transição entre as tarefas realizadas com tijolos para as tarefas realizadas com gráficos de barra foi positiva. Sendo assim, Ibid. propuseram um segundo estudo cujo propósito foi aprofundar o tema acerca da adequação dos gráficos como instrumentos didáticos que colaboram na resolução de situações-problema do campo aditivo, com e sem atividades preliminares com tijolos.

4.3.5 Conceito de Composição de medidas

Para investigar a relação entre construção e interpretação de gráficos de barras, Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001) propuseram um estudo com 107 alunos de 3ª série de uma escola particular, com idades entre nove e dez anos em quatro turmas de ambos os sexos. Os participantes resolveram cinco atividades: (1) ler e interpretar gráficos com dados nominais; (2) ler e interpretar gráficos de barras com dados ordinais; (3) ler e interpretar gráficos com dados nominais (onde para cada descritor havia três valores) e (4) construir gráficos a partir de uma tabela com dados nominais e (5) posteriormente com dados ordinais. Os resultados mostram que foram apresentadas facilidades em leituras pontuais, abordando noções de máximo, mínimo e frequência; entretanto, apresentaram dificuldades em leituras variacionais, pois exigia uma análise global dos gráficos. Além disso, houve maior facilidade em ler e interpretar os gráficos de que em construí-los, e trabalhar com a representação de dados nominais foi, predominantemente, mais fácil do

que com a representação de dados ordinais.

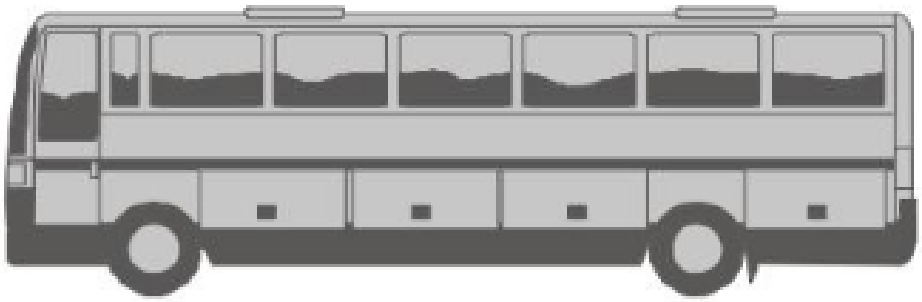
Ibid. apresentam explicações, considerando que os dados fornecidos para a execução da tarefa apresentavam dois fatores diferentes: (1) os dados nominais, usados para representar quantidades, apresentavam valores menores do que 10(dez) e os dados ordinais apresentavam valores maiores que 10(dez). Para representar frequências, foram usados valores maiores que a altura dos quadrados. Por esse motivo, nem sempre, cada frequência pode ser representada por um único quadrado. Isso levou vários alunos a representarem frequências maiores pintando quadrados próximos. Observaram, além disso, que as interpretações sobre os gráficos foram influenciadas pela compreensão dos valores presentes no gráfico. Em outras palavras, Ibid. refletem se a compreensão dos alunos sobre os significados dos valores dispostos nos gráficos não teriam interferido durante a interpretação dos gráficos.

4.3.6 Conceito de Transformação de Medidas

Moretti e Borba (2004) conduziram um estudo cujo objetivo foi fazer um levantamento de alguns dos conhecimentos que crianças possuem anteriormente à introdução formal, pela escola, do conceito de número inteiro relativo . Participaram do estudo 65 crianças, sendo 16 da 4ª série, 31 da 5ª série e 18 da 6ª série do Ensino Fundamental, com idades entre 9 e 12 anos. Todas as crianças responderam testes que tiveram como objetivo avaliar a resolução de problemas monetários e de deslocamento, verificando, especificamente, como a mudança de contexto influencia o desempenho dos alunos. Avaliou-se, além disso, potenciais influências que textos e gráficos teríam sobre o desempenho dos alunos, ou seja, se o gráfico ajudaria na resolução das questões. E por fim, avaliou-se a possível influência que diferenças entre a resolução de problemas, notadamente, problemas diretos (valor final desconhecido) e problemas inversos (valor inicial desconhecido) tería sobre o desempenho dos alunos. No teste havia situações de jogo, compras, saldo bancário, deslocamento em elevadores, viagens e esportes.

Os resultados mostraram que foi mais fácil resolver problemas diretos do que problemas inversos, nos quais o item desconhecido vem posicionado no estado inicial. Problemas com números relativos que envolviam inversão foram mais difíceis para a maioria dos alunos. Logo, os autores concluem que crianças com idades entre sete (07) e oito (08) anos só são capazes de resolver com sucesso problemas aditivos com números relativos se forem atendias as seguintes condições: os números devem representar medidas, os problemas devem ser diretos e resolvidos oralmente. Em razão disso, sugere-se que seja considerado o conhecimento que as crianças obtiveram, a respeito de números relativos, antes da introdução formal a este conceito. Contudo, para que seja desenvolvido amplo conhecimento sobre as operações aditivas com números relativos, devem-se discutir outros significados, outras propriedades e outras formas de representação com as crianças.

Figura 47 – Figura decorativa



Fonte: (ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007)

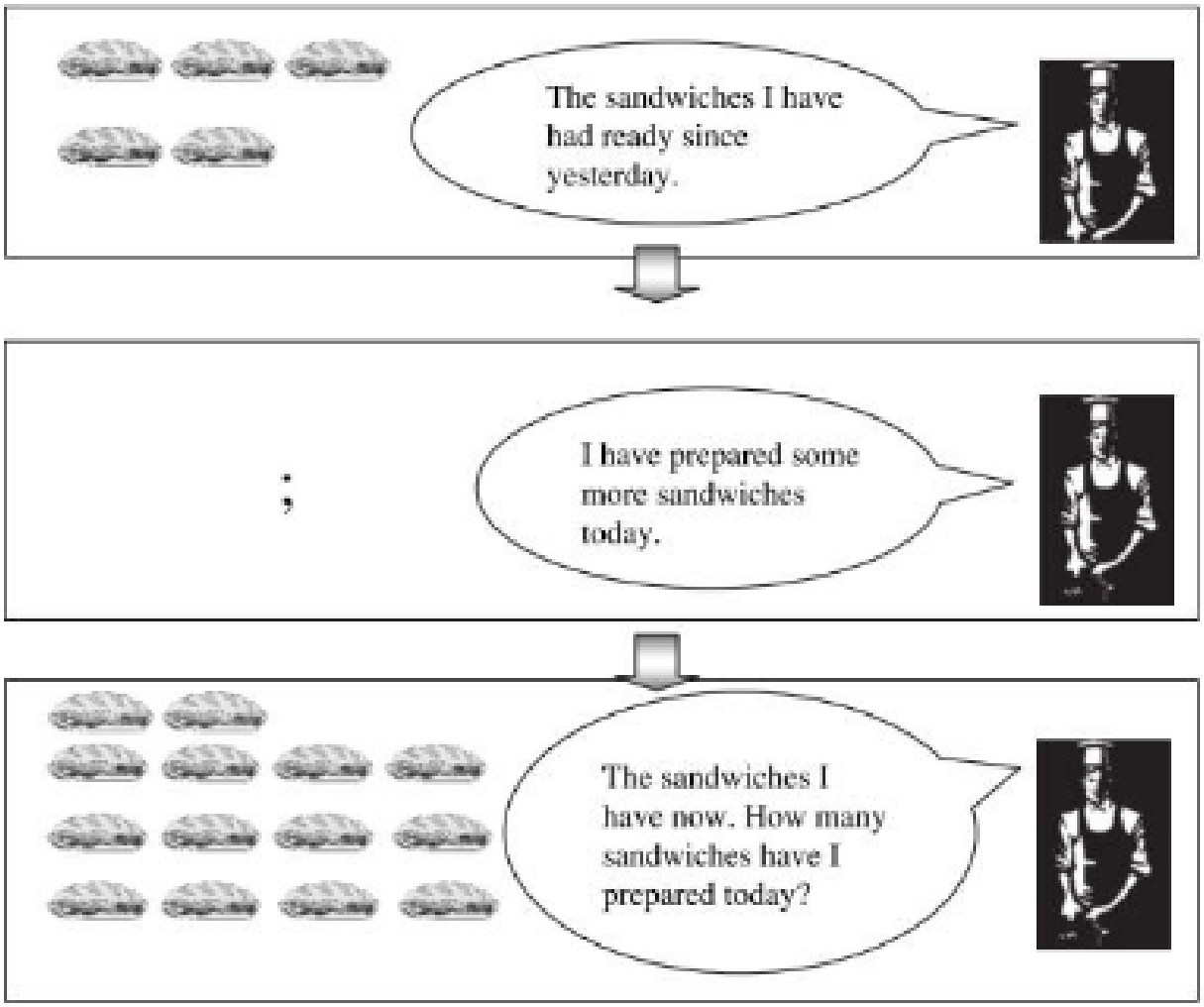
Elia, Gagatsis e Demetriou (2007) continuam a discussão sobre a natureza e os possíveis efeitos de diferentes tipos de representação em situações-problema do campo aditivo. Por exemplo: P1- **Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 reais e ainda ficou com R$ 7, 00**. Quanto ela possuía antes de fazer a compra? Para situações como essa, os autores identificaram duas dimensões: a estrutura da situação-problema e os modos de representação. No que tange a estrutura das situações-problema pode variar tanto o local do item desconhecido quanto o tipo da transformação(juntar ou separar) e, quanto aos modos de representação foram utilizadas: (1) figura informacional; (2) figura decorativa; (3) linha numerada; (4) descrição verbal.

1. Exemplo 01: *In a bus there were 8 passengers at the beginning. At a bus stop some more passengers entered the bus. Then, all of the passengers became 14. How many passengers entered the bus at the bus stop?* (ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007).

O exemplo 1 é um problema da categoria transformação aplicada a uma medida. Existia, portanto, uma medida inicial, no caso, (08) oito passageiros, quando o ônibus parou, entraram mais passageiros resultando em (14) quatorze passageiros. No experimento, foram construída situações como essa, entretanto, variando o sinal da transformação para gerar transformações positivas e negativas. Além disso, houve a variação da posição do item desconhecido. Dessa forma, foram construídas quatro situações-problema. As perguntas que motivaram o estudo versavam sobre: os efeitos que diferentes modos de representação (**figura decorativa, figura informativa, linha numerada e descrição verbal**) tiveram sobre o desempenho dos alunos, bem como sobre possíveis diferenças existentes entre alunos com idades diferentes.

A figura 47 apenas decora a situação-problema, logo, não apresenta influências sobre sua resolução. Já a figura 48, a seguir, é denominada informacional e representa um problema de transformação aplicada a uma medida. De cima para baixo, no primeiro quadro da figura 48 aparece a medida inicial; no meio aparece a transformação e no

Figura 48 – Figura informativa



Fonte: (ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007)

último, o estado final da medida. Nesse exemplo, foi solicitada a transformação ou valor relativo, contudo, qualquer dos três elementos pode ser solicitado, ou seja, qualquer dos três elementos pode ser o item desconhecido.

Os resultados comprovaram que as dificuldades foram resultantes da interação dos dois fatores: (1) o local do valor desconhecido e da (2) da representação Elia, Gagatsis e Demetriou (2007). Nas tarefas difíceis o valor desconhecido estava no inicio; naquelas de dificuldade moderada o valor desconhecido estava na transformação e as fáceis o item desconhecido estava no estado final. Quanto à forma de representação, foi evidente que as tarefas difíceis envolviam figuras informativas, enquanto as tarefas fáceis envolviam descrição verbal ou descrição verbal acompanhado de uma figura decorativa. Em alguns casos, pareceu que o modo de representação do problema foi um fator mais forte do que a localização do item desconhecido. Os problemas que envolviam figuras informacionais com o item desconhecido na transformação foram, portanto, mais difíceis do que os problemas apresentados com outros modos de representação e com o item desconhecido no estado inicial. Em outras palavras, a dificuldade da situação-problema foi influenciada

por dois fatores: local do valor desconhecido e modo de representação. Alunos mais velhos obtiveram melhor desempenho em todos os tipos de situação-problema. Entretanto, convém pontuar que os dados quantitativos oferecidos pelos autores precisariam

> ser complementados com dados qualitativos que revelem as causas para a hierarquização das tarefas: tarefas com item desconhecido no inicio serem mais difíceis do que tarefas com tal elemento na transformação ou no estado inicial(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007, pg-668), tradução nossa.

4.3.7 Conceitos presentes nas Estruturas Multiplicativas

Para resolver problemas que envolviam Estruturas Multiplicativas Lautert e Spinillo (2002) mostraram que a instrução escolar influenciou o desempenho das crianças promovendo alto índice de acertos nos dois tipos de problemas(partição: 75% e por quotas: 67.5%). Contrariamente, na ausência dessa instrução, as crianças apresentaram baixo índice de acerto (partição: 2.5% e por quotas: 5%). Segundo Ibid., tais dados indicam que o desempenho depende mais da instrução recebida do que do tipo de problema apresentado, visto que a maioria das crianças com instrução escolar acertou ambos os problemas, enquanto a quase totalidade das crianças sem instrução errou os dois tipos de problemas. Neste estudo, as crianças significaram a divisão como partição, que envolve a ideia de que se tem uma quantidade inicial e o numero de vezes que esta deve ser distribuída até esgotar o todo LAUTERT; SPINILLO, op. cit..

Harries e Barmby (2007) conduziram um estudo para analisar o uso da representação matricial com alunos com idade entre de 04 (quatro) e 06 (seis) anos. Os autores analisaram as propriedades e características da multiplicação, quais sejam: (a) replicação; (b) uso de operações binárias; comutatividade e distributividade; propondo que expressões da representação potencialmente eleitas para uso no ensino de multiplicação precisam mostrar as características acima (a) e (b) ao mesmo tempo em que ajudam no processo de cálculo. Ou seja, representaçóes adequada para representar o conceito de multiplicação atendem a três critérios: apresentar um conjunto limitado e compatível de representações; capturar as ideias fundamentais do domínio e oferecer mecanismos de visualização de tais características (HARRIES; BARMBY, 2007). Por esse motivo, como passo preliminar, os autores fizeram perguntas à representação, ou seja, verificaram se a representação matricial mostrava, claramente, a replicação do elemento como aspecto chave da multiplicação e se as representações recebiam duas entradas, por exemplo: linha e coluna.

A representação matricial atendeu aos requisitos acima aludidos. Em razão disso, ela foi retratada como um ambiente de aprendizagem substancial (HARRIES; BARMBY, 2007) e, portanto, escolhida para ser usada na resolução de situações multiplicativas. Sendo assim, Ibid. propuseram um experimento com 24 crianças de (04) quatro anos e 20 crianças de (06) seis anos. As sessões foram realizadas com pares de alunos usando o ambiente

Macromedia Flash[1] contendo a representação matricial da operação de multiplicação. Todas as ações foram filmadas com a ferramenta Camtasia [2]que favorece a captura das telas nas quais aconteciam as ações das crianças. Além das ações, os diálogos das crianças foram gravados durante a execução das tarefas.

Como resultado, Harries e Barmby (2007) verificaram que as crianças de (06) seis anos tiveram familiaridade com a representação; e, em alguns momentos, embora tenham memorizado o resultado da operação, conseguiram elaborar métodos para calcular o número total de círculos coloridos, presentes na representação matricial. Além disso, os autores perceberam evidências do uso das propriedades de comutatividade e distributividade. Já as crianças de (04) quatro anos apresentaram dificuldade em alguns momentos, principalmente quando elas já sabiam o resultado e tentavam representar usando grupos de 10 unidades. Além disso, ficou evidente que a representação matricial encorajou discussões sobre o caminho mais eficiente para contar, logo, apresentou claro potencial para promover raciocínio sobre multiplicação. Em razão disso, o foco das pesquisas deveria repousar sobre tal potencial. Harries e Barmby (2007), analisando, mais amiúde, a progressão dos aprendizes no uso de representações para resolver situações-problema do campo multiplicativo.

4.4 Discussão

Face à liberdade de mecanismos utilizados na resolução de situações-problema, que variaram desde lápis e papel até interfaces computacionais, foi possível perceber a influência que diferentes expressões das representações exercem sobre o processo de resolução de problemas no campo aditivo e multiplicativo sozinhas ou combinadas com outras. Entretanto, independentemente dos recursos materiais utilizados, os estudos buscaram identificar, além dos elementos observáveis na atividade matemática, tais como: erros, prevalência de erros entre diferentes materiais, consecução de erros e agrupamentos de tarefas, buscaram identificar indícios de uma potencial adequação das expressões da representação, escolhidas para representar conceitos específicos. Em outras palavras, buscavam homomorfismos [3] entre representações e os conceitos metaforicamente representados.

Nessa linha, Gérard (1998), mostra que o conceito de dupla proporcionalidade pode ser metaforizado com linhas paralelas, colunas paralelas, magnitude e as propriedades de um plano. Esse exemplo mostra que havendo homomorfismo, entre representações e conceitos metaforicamente representados, facilita, por conseguinte, a percepção desses conceitos. Continuando, Sedig, Klawe e Westrom (2001) escolheram um arco de circunferência, visto

[1] Macromedia Flash 8 é uma ferramenta de design gráfico da Macromedia que oferece aos web designers uma plataforma para criar desenhos animados

[2] Com Camtasia Studio você pode gravar a tela de seu computador

[3] (VERGNAUD; PRÉVOST, 1994)

na figura 63 para representar o conceito de rotação. Tal arco possui dois pontos de controle: a cabeça, usada para modificar o ângulo de rotação, e o centro, usado para modificar o centro de rotação da imagem. Durante a execução das tarefas, o usuário movimenta os pontos de controle e, dessa forma, interage com as dimensões e propriedades da representação, as quais são contíguas às dimensões e propriedades do conceito de rotação.

Embora variadas expressões da representação tenham oferecido bons resultados frente à atividade de resolução de situações-problema, não ficou evidente, a partir dos estudos anteriores, a superioridade de uma determinada expressão em relação a outra. Os resultados obtidos e as discussões realizadas pelos autores mostram que existe dependência do contexto nos resultados dos experimentos(SELVA, 2004; GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; HARRIES; BARMBY, 2007). Em outras palavras, embora alguns modos de representação mostrem resultados melhores que outras, esses não puderam, no contexto deste trabalho, serem generalizados, e nem tampouco, utilizados como critério para avaliar a existência de homomorfismo como explicado por (GÉRARD, 1998; VERGNAUD; PRÉVOST, 1994) entre as expressões da representação escolhidas e os conceitos presentes nas Estruturas Aditivas e Multiplicativas.

As pesquisas anteriores apresentaram resultados quantitativos. Logo, a analise dos significados atribuídos pelas crianças, para cada elemento constitutivo da representação, ficou impossibilitada. Não foi possível, portanto, indicar as expressões da representação que mais favoreceram o desenvolvimento de um apropriado modelo conceitual. Ou seja, as conclusões dos autores foram sempre dependentes do contexto. Houve, no entanto, apenas uma exceção: o caso das multiplicativas. Por exemplo, (HARRIES; BARMBY, 2007) analisaram as propriedades e características da operação de multiplicação e concluíram que a representação matricial atende aos requisitos, independentemente do contexto da resolução das situações-problema. Logo, comparada a outras, é mais adequada para ser usada em situações sobre o campo multiplicativo.

Conceitos estão enraizados em situações-problema(VERGNAUD, 1983). Logo, é na vivência com diversas situações-problema que a habilidade dos aprendizes no trato com tais conceitos é ampliada(GÉRARD, 1998). Observar formas de representação utilizadas no processo instrucional sobre soma, subtração, multiplicação e divisão implica analisar tarefas que envolvem tais operações (GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; BORBA, 2002; LAUTERT; SPINILLO, 2002; SELVA, 2003; MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004; MORETTI; BORBA, 2004; GAGATSIS; ELIA, 2005; SELVA; FALCAO; NUNES, 2005; HARRIES; SUGGATE, 2006; HARRIES; BARMBY, 2007). Logo, como sugerido por Harries e Barmby (2007) implica verificar, por meio de resultados qualitativos e quantitativos, como tais expressões da representação influenciaram o raciocínio dos estudantes no curso da tarefa. Ou seja: como a organização das ações(dimensão cognitiva)

dos estudantes foi influenciada pela tarefa (dimensão material).

4.5 Conclusão

Nesses estudos anteriores, os autores observaram o uso da representação para tornar mais claro o papel que cada uma exerce no desenvolvimento de habilidades nos alunos, sozinhas ou combinadas. Nesse sentido, viu-se que houve um esforço em tornar mais claro o alcance ou o desempenho que determinada expressão da representação, bem como as modalidades de manipulação oferecida por ela tiveram sobre tarefas voltadas para ensinar conceitos específicos. Sendo assim, expressões da representação apresentam aspectos diferentes de um mesmo conceito, e com outras, podem ampliar a percepção dos alunos para outros aspectos do mesmo conceito ou relacionamentos entre conceitos diferentes. Uma situação-problema é, portanto, qualquer tarefa, qualquer experiência vivenciada e que, para tal, seja necessário oferecer respostas a perguntas antigas ou a novas perguntas. Por exemplo, algumas vezes, determinado número representava um cardinal, em outras, além de cardinal, ele representava o estado inicial de uma transformação. Ou seja, um mesmo elemento assumiu diferentes papéis e, por conseguinte, diferentes significados. Tais distinções fizeram com que os aprendizes percebessem a flexibilidade existente nos papéis exercidos por determinado elemento, esteja esse numa mesma situação-problema ou em situações-problema diferentes. Os significados, atribuídos aos elementos constitutivos da representação, influenciaram portanto, as decisões e ações dos estudantes.

5 Representações visuais, modalidades de interação e ensino das estruturas aditivas e multiplicativas.

5.1 Introdução

As diversas perspectivas sobre representações foram unificadas e denominadas por Goldin, (1998c) p.143, tradução nossa, "*como sistema de representação externa, os quais incluem símbolos falados, escritos, figuras estáticas, modelos manipulados bem como situações do mundo real*". Nesse sentido, Kaput, (1986) já anunciara o computador como uma nova janela para representações destacando quão importante é usar tecnologias de informação no contexto do ensino, pois a interatividade proporcionada pelo novo material medeiam relções entre aprendizes e representações metafóricas de conceitos(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIG; SUMNER, 2006).

5.1.1 Representações visuais de Matemática e suas modalidades de interação

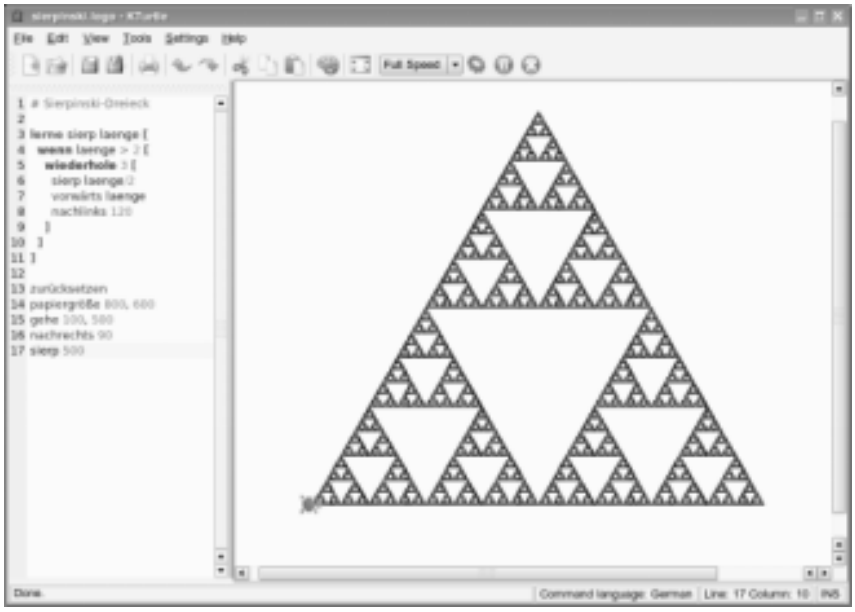
> *Visual Mathematical Representations-VMR* são uma coleção de gráficos e símbolos que visualmente codificam propriedades: funcionais, causais, estruturais e semântica, além de relacionamentos do mundo representado, seja esse, concreto ou abstrato SEDIG; SUMNER, op. cit., pg-02, tradução nossa.

Interações, em ambientes computacionais, ocorrem por meio de modalidades de interação, as quais podem ser do tipo (a) **macro nível**, utilizadas para oferecer métodos pedagógicos, com por exemplo, construtivismo e aprendizagem situada e de (b) **micro nível**, utilizadas para tarefas tais como: **buscar**, **rearranjar**, **anotar** e **navegar**. Neste trabalho, foram estudas as modalidades de micro níve, que, segundo, Sedig e Sumner (2006), estão categorizadas como: **Interações básicas**; **Interações baseadas em tarefa**; ***Repicturing*** e **Combinação de interações baseadas em tarefas**.

5.1.1.1 Interações Básicas

As interações básicas podem ser do tipo: **Conversação**, **Manipulação** e **Navegação**. A figura 49 mostra um exemplo de **Conversação**, onde comandos são escritos em linguagem de programação. Do lado esquerdo da figura 49 aparecem comandos e, do lado direito aparece um triângulo composto por vários triângulos menores que é resultante desses comandos. **Manipulação ou tocar** a *Visual Mathematical Representations*- VMR

Figura 49 – Linguagem Logo



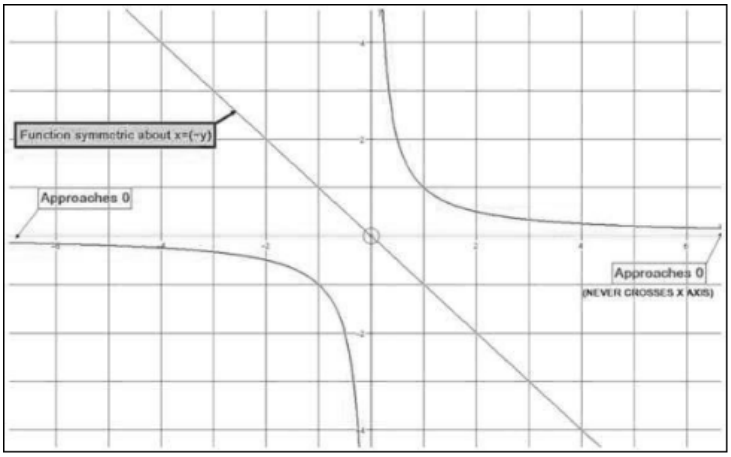
Fonte: (LINUX, 2010)

com o cursor vendo-a completamente, nessa modalidade são realizadas ações de seleção, movimentação e mudança da VMR, já a **Navegação** é dividida em duas atividades menores: (a) mover sobre ou (b) através da VMR, favorecendo, por conseguinte, a percepção de localização durante o movimento, bem como modelagens mentais e interpretações. Além disso, **Navegar** pode ajudar no desenvolvimento de mapas cognitivos internos sobre VMRs divididos em três estágios de conhecimento: (1) percepção de pontos de referência, (2) definição rotas e (3) observar o caminho (SEDIG; SUMNER, 2006).

5.1.1.2 Interações Baseadas em Tarefas

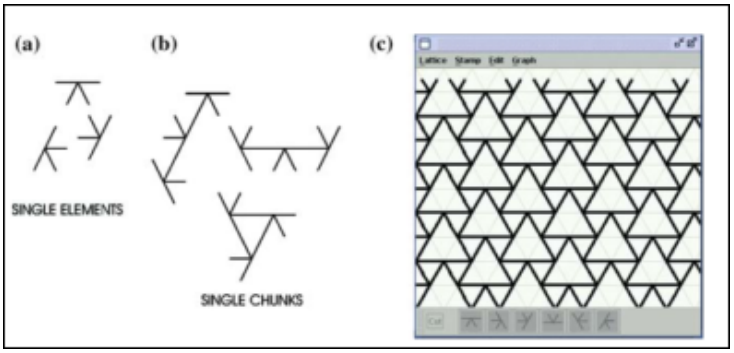
As interações baseadas em tarefas podem ser do tipo: **Animações** e **Anotações**. Animações são voltadas para gerar movimento nas VMRs e, por conseguinte, usadas para visualizar processos transacionais, mostrando a semântica, bem como mostrando transformações temporais inerentes a VMR. Já **as anotações** permitem: adição de metadados sobre (i) elementos, quando anotações são inseridas em elementos dentro da VMR; sobre (ii) **transformações temporais**, quando um comentário é anexado em VMRs durante um processo de mudança e sobre (iii) **relações causais**, quando explicações são anexadas em elementos interativos da VMR ou em elementos representativos de relacionamentos causais entre elementos da VMR. Na figura 50, aparecem marcas sobre a VMR evidenciando, durante a interação, elementos que foram significativos e contribuíram na construção de hipóteses e tomada de decisão. A presença dessas anotações mostram pistas de como aconteceu a interação entre usuário e os gráficos da figura 50. Além das anotações e animações, os autores ainda citam o ***Chunking*** ou cortar em pedaços grandes

Figura 50 – Anotação sobre inseridas em uma função hiperbólica retangular



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 51 – Ks Chunking para construir de uma figura repetida K vezes

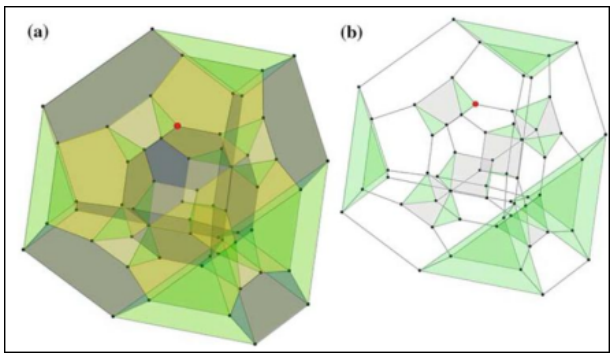


Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

que, ao invés do usuário manipular elementos atômicos, manipula grupos de elementos, interagindo com agrupamentos construídos com base em algum critério de similaridade. A figura 51, a seguir, apresenta um exemplo de *chunking*; A figura 51(b) mostra três agrupamentos simples e diferentes construídos com os elementos individuais da figura 51(a) tomando por base algum critério de similaridade. Já a figura 51(c) mostra uma figura completa em cujo método de construção pode ter sido usado tanto os elementos individuais figura 51 (a) quanto qualquer dos três diferentes agrupamentos da figura 51 (b) usando qualquer combinação. **Compor**, diz respeito às ações de juntar e compor e apesar de parecida com o Chunking, Compor é usado para construir uma VMR completa e não apenas pedaços dessas. **Cortar**, se refere a remover partes desnecessárias da VMR, para favorecer a visualização de partes desejadas; **Filtrar** serve para mostrar, esconder ou transformar subconjuntos de elementos visuais da VMR de acordo com a ocorrência de certas características como visto na figura 52(b) , gerada a partir da aplicação de filtros na figura 52.

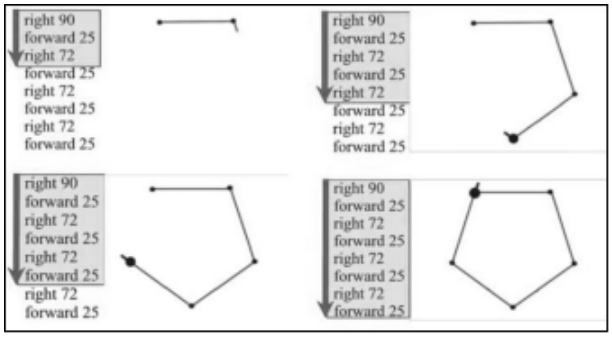
Ainda sobre as **Interações baseadas em tarefas**, tem-se: **Fragmentar** usada

Figura 52 – Exemplo de filtragem.



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

Figura 53 – Exemplo de Scoping



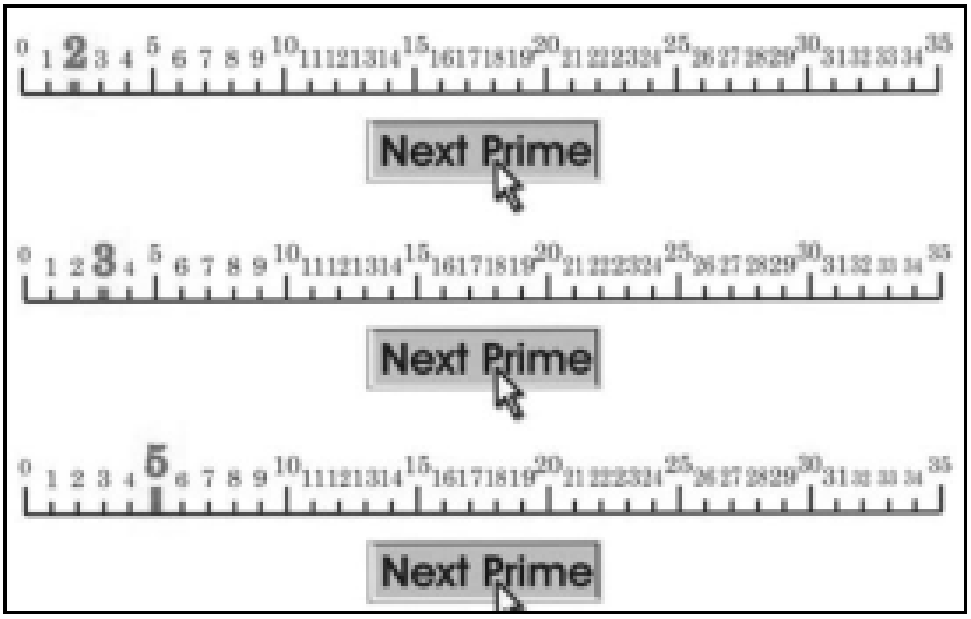
Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

para quebrar uma VMR em seus componentes ou partes elementares; **Investigar** usada para selecionar aspectos, propriedades ou componentes de uma VMR para obter informações ou realizar análises futuras. (i) **Rearranjar**, se refere a **ordenar**, **sequenciar** ou **empilhar** e é usada para mudar as disposições espaciais ou o direcionamento dos elementos dentro de uma (VMR).

5.1.1.3 *Repicturing*

Repintar é usado para exibir uma VMR de forma alternativa, permit ver uma VMR a partir de três perspectivas diferentes: (1) **Espacialmente**, (2) **Semanticamente** e (4) **Esteticamente**. A primeira está relacionada com a geometria da VMR, a segunda, com o seu significado conceitual, e a terceira com a sua aparência. O ***Scoping***, exemplificado na figura 53, é um tipo de *repicturing* e serve para, durante a interação, incrementar ou decrementar o campo visual sobre representações. O ***Scoping*** de um VMR, como mostrado na figura 53, é a quantidade de estrutura visual exibida ou o número de elementos vistos em um determinado momento, que colabora para entenderem-se os componentes ou o processo pelo qual VMRs inteiras são formadas. Em tais situações, para descobrir o processo de construção da estrutura completa, é possível ajustar uma visão com base em

Figura 54 – Exemplo de buscar



Fonte: (SEDIG; SUMNER, 2006)

composições de pedaços ou de elementos atômicos das VMRs. (b) **Buscar** em uma VMR é um tipo de *Repicturing* que serve para procurar a existência ou local de um elemento, esquema ou estrutura específica. Como visto na figura 54, buscar é utilizado quando o objeto de pesquisa não é facilmente detectado. Ou seja, para destacar ou listar elementos. O resultado da pesquisa pode, em seguida, ser avaliado e apresentado com ou sem contexto associado.

Vivências com expressões da representação contribuem para percepção de elementos do conceito metaforicamente representado (DE-SOUZA; SEDIG, 2001; SEDIG; SUMNER, 2006). Logo, é emergente observar além das expressões da representação, bem como sua disponibilidade em interface de learneware (DE-SOUZA; SEDIG, 2001) e o contexto no qual representações foram utilizadas(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007; GAGATSIS; ELIA, 2005; HARRIES; SUGGATE, 2006; SELVA; FALCAO; NUNES, 2005; GÉRARD, 1998). Entretanto, devido a existência de variados conceitos presentes no ensino formal é necessário, portanto, delimitá-los. Por esse motivo, neste estudo, os conceitos metaforicamente representados são aqueles presentes no campo conceitual das Estruturas Aditivas e Multiplicativas cuja representação, neste estudo, pode ser visto na 55 mostradas na interface do o Gerard, interface interativa, visto na figura 56.

5.1.2 Estruturas Aditivas

Em Magina e al. (2001) encontramos quatro exemplos de problemas matemáticos apresentados no Ensino Fundamental nas séries iniciais:

1. Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas 4 garotos e 7 garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa?

2. Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?

3. Carlos tem 4 anos. Maria é 7 anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria?

4. Roberto foi jogar vídeo game. Ao fim da primeira fase do jogo ele tinha perdido 4 pontos. Ele, então, foi para a segunda e última fase do jogo. Ele terminou o jogo com 7 pontos ganhos. O que aconteceu na segunda fase?

Magina e al. (2001) analisam as situações-problema 1, 2, 3, 4 , e concluem que estão presentes: (1) Conceito de medida (magnitude onze é maior que sete, que é maior do que quatro). (2) Conceito de adição; (3) Conceito de subtração; (4) Conceito de transformação de tempo (por exemplo, Maria possuía agora... quanto tinha antes?).(5) Relação de comparação (por exemplo, quem tem (é) mais, quem tem (é) menos?, quanto tem a mais, quanto tem a menos?) e (6) Composição de quantidade. E, além disso, a operação realizada nas quatro situações-problema é a mesma: $4 + 7$; entretanto, 1, 2, 3, 4 embutem ideias diferentes MAGINA; AL., op. cit.. Por exemplo, na figura 55 observa-se que, embora a representação numérica seja a mesma, $4 + 7 = 11$, os diagramas, correspondentes a cada categoria, são diferentes e, por conseguinte, denotam relações qualitativas diferentes MAGINA; AL., op. cit..

Na linha (01) da figura 55, por exemplo, os dois quadrados, posicionados à esquerda da **chave**, representam as **Partes** da composição, a chave representa a categoria de Composição de medidas e o quadrado, posicionado à direita da chave, representa o elemento denominado de **Todo** da composição. Na linha (02) dois, a seta horizontal representa a categoria de Comparação de medidas, o quadrado, posicionado à esquerda da seta, representa o **estado inicial**, o quadrado posicionado à direita, representa o **estado final**. O círculo, por sua vez, representa a **relação** entre o estado final e o inicial da Transformação de medidas, representada por uma seta horizontal. Na linha (03) três, o quadrado , posicionado embaixo da seta vertical, representa o elemento denominado de Referido, ou seja, a base da comparação, o quadrado, posicionado em cima da seta vertical, representa o **Referente**, aquele que se refere ao **Referido**. O círculo, por sua vez, representa a relação entre o **Referido** e o **Referente**. A resolução de cada situação-problema, portanto, envolve esquematização e interpretação de problemas e, por conseguinte, depende da maneira como essa é proposta Ibid.. Antes de Ibid., Vergnaud (1986) já anunciara que os conceitos presentes em situações aditivas nunca aparecem isolados e, em razão disso, é necessário utilizar expressões da representação que explicitem tanto os conceitos quanto as relações entre eles.

Figura 55 – Legenda de Vergnaud

Categoria	Solução numéricaca	Representação da situação-problema	Representação da categoria
I. Composição de medidas Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas 4 garotos e 7 garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa? São duas quantidades, que estão expressas, de existência concomitante, a partir das quais o indivíduo deve compor uma terceira quantidade.	4+7 = 11	4 7 ?	
II. Transformação de medida Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra? As quantidades iniciais e finais são conhecidas, mas, no caso, o que se deseja saber é o valor da transformação que ocorre entre o primeiro e o segundo momento.	4+7 = 11	? -4 ?	
III. Comparação de medidas Carlos tem 4 anos. Maria é 7 anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria? Mais uma vez, as quantidades são conhecidas e concomitantes, buscando-se comparar a diferença existente entre as duas (relação).	4+7 = 11	? +7 4	

Fonte: (QUEIROZ et al., 2010)

Figura 56 – Interface do Gerard

Fonte: (MOURA, 2010)

5.1.3 O Gerard

A figura 56 mostra o seguinte problema: Numa sala de aula tem (trinta) 30 cadeiras (cinco 05 estão quebradas, quantas podem ser usadas pelos alunos? Essa é a representação textual do problema que, neste caso, pertence a categoria de Composição de Medidas. O Gerard apresenta duas representações: uma textual e outra diagramática. Ao iniciar a

resolução de uma situação-problema o usuário vê o texto e, abaixo dele, o espaço usado para mostrar a representação diagramática. Na sequência, o usuário lê o texto e seleciona um dos artefatos representantes das categoria: a **chave**, a **seta vertical** ou a **seta horizontal**. Caso acerte, o computador oferece um diagrama vazio, sem valores numéricos posicionados. Em seguida, com um quadrado, o computador marca o elemento no texto que deve ser posicionado no diagrama. O usuário, em seguida, com o *mouse*, pega o elemento do texto, e o arrasta-o, posicionando-o no diagrama.

As ações, executadas na interface da figura 56, são realizadas via modalidades de interação, que, segundo Shneiderman (1987), são do tipo: **Selecionar**: para escolher um item a partir de um conjunto de itens; **Posicionar**: para escolher um ponto em um espaço de uma ou mais dimensões; **Orientar**: para escolher um ponto em um espaço de duas ou mais dimensões; **Quantificar**: para especificar um valor numérico; **Caminho**: para executar rapidamente tarefas de posicionar e orientar; **Texto**: para modificar, mover e editar textos em um espaço de duas dimensões. Essas são as tarefas disponíveis na interface da figura 56 cuja ordem de execução aparece no quadro 8, a seguir.

Quadro 8 – Tarefas executadas pelo usuário

Ordem	Tarefa de mouse	Elemento
1	Selecionar	Categoria
2	Selecionar	Representação da categoria
3	Selecionar	Números no texto
4	Caminho	Números no texto
5	Posicionar	Números no diagrama
6	Selecionar	Sinal do número relativo
7	Texto	Resultado no local do item desconhecido
8 Realizar as tarefas (1,2,3,4 e 5) sem indicativos		

Fonte: Do Autor

Nas linhas do quadro 8 estão as ações realizadas. Nas colunas aparecem a ordem, a tarefa de mouse e o elemento sendo manipulado na ação. Dessa forma e, com base na compreensão do texto, estima-se que o processo de ler o texto, encontrar os objetos matemáticos, previamente marcados e, em seguida, o posicioná-los corretamente no diagrama seja mediador da compreensão das relações matemáticas presentes no texto da situação-problema.

5.2 Delineamento da pesquisa

À luz dessas discussões anteriores, especificamos as perguntas feitas por De-Souza e Sedig (2001) para as seguintes questões:

5.2.1 Pergunta de pesquisa

- Quais elementos da representação de conceitos poderiam ser manipulados pelos participantes no uso do Gerard?
- Que tipos de protocolos de mouse poderiam ser manipulados pelos participantes no uso do Gerard?

5.2.2 Objetivos

- Analisar os elementos representação de Vergnaud, (1986), bem como as maneiras de manipulação desses na interface do Gerard.
- Analisar as maneiras de manipulação, potencialmente utilizados, na interface do Gerard.
- Verificar como aconteceu a tarefa na ausência dos indicativos ou ajudas, particularmente, observar tais resultados numa dinâmica de retirada gradativa dos indicativos ou ajudas.

5.2.3 Análise Qualitativa dos dados

Objetos matemáticos se diferenciam a partir de um ponto de vista conceitual e a partir de um ponto de vista linguístico (GÉRARD, 1998). Por exemplo, os verbos: **ter** e **possuir**, tanto no passado quanto no presente discriminam o estado **inicial** e o estado **final** de uma transformação, já advérbios como: **agora**, **antes** ou **depois** possuem *status* de **organizadores da informação** GÉRARD, op. cit.. Segundo Ibid., após algumas vivências com a resolução de situações-problemas, surgem palavras como: **estado**, **transformação** e **incremento**. Em outras palavras, por meio de mudanças que possam ocorrer no discurso dos participantes, é possível identificar o processo de construção do conceito GÉRARD, op. cit.. Por exemplo, segue protocolo verbal mostrando mudanças de significado dos elementos examinadas à luz do que foi feito por GÉRARD, op. cit.:

1. *O número (12) doze é a quantidade.*
2. *O número (12) doze é a quantidade de pacotes e elementos que eu posso comprar de elementos/caramelos que eu posso comprar com doze reais.*
3. *O número quatro é a alteração da quantidade.*
4. *Um número é uma quantidade.*
5. *Eu via o numero 17(dezessete) como uma base, então só fiz arrastar pra base do diagrama.*

6. *O 17(dezessete) passou pra mim a ser uma parte e não uma base de onde eu ia partir.*

Com base em Gérard (1998), vê-se que a sentença 1 foi construída com um predicado unário. A segunda 2 e terceira 3, um predicado ternário. A sentença 4 generaliza a 1 primeira e a 2 segunda sentença. Na quinta 5 sentença, o usuário percebe a presença do elemento denominado de **base da comparação** tanto no texto quanto no diagrama, mostrando que foi capaz de identificar propriedades comuns a ambos. Na sexta 6 sentença, o número dezessete (17), identificado na quinta 5 sentença como Base da Comparação, assume o papel de uma das partes da Composição de Medidas. Logo, vê-se que houve uma mudança nos papeis assumidos pelos números durante a resolução de situações-problemas.

5.2.4 Participantes

Os participantes desta pesquisa, são professores polivalentes que lecionam nas séries iniciais do Ensino Fundamental I. Foram convidados todos os participantes do projeto de extensão intitulado: Formação de professores, estruturas aditivas, multiplicativas e análise qualitativa, aprovado com apoio do programa PIBIN da UNIVASF- Universidade Federal do Vale do São Francisco em parceria com a prefeitura de Juazeiro-BA; entretanto, de um total de (25) participantes apenas (07) sete, presentes no Quadro 9 aceitaram participar do experimento. Os participantes do quadro 9 resolveram as (09) nove situações-problema

Quadro 9 – Legenda: PG: Pós-Graduação, MA: Matemática, EF: Ensino Fundamental, PU: Pública, P: Particular.

Professor	01	02	03	04	05	06	07
Sexo	M	F	M	F			F
Idade	45	30	48	30			35
Esc	PG	2°	PG	PG			PG
For	MA	MG	MA	MA			MA
SL	EF	EF	EF	EF			EF
TE	P	PU	P	P			P

Fonte: Do Autor

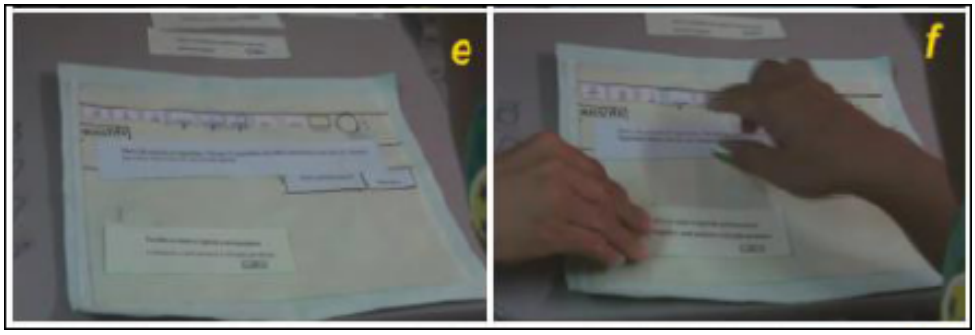
presentes no quadro 10 , com e sem ajudas. No quadro 10 aparecem 09(nove) situações aditivas dos tipos Composição de Medidas, Transformação aplicada a uma Medida e Comparação de Medidas.

Quadro 10 – Legenda: Legenda TM: Transformação de Medidas, COP: Comparação de Medidas, CP: Composição de medidas.

ID	Situação-Problema sobre Estruturas Aditivas	Tipo
AP1	Maria faz coleção de figurinhas. Ela tem 32 figurinhas, sua mãe a presenteou com mais 22. Quantas figurinhas Maria tem em sua coleção agora?	TM
AP2	Glaudenice tem R$ 14, 00 reais a amenos que Nádia. Nádia tem R$ 27,00 reais. Quantos reais Glaudenice tem?	COP
AP3	Jammes tem 17 CD's a menos que Gisele. Quantos CD's Gisele tem?	COP
AP4	Numa sala de aula tem 30 cadeiras, 5 estão quebradas. Quantas podem ser usadas pelos alunos?	CM
AP5	Rafael tinha dez refrigerantes e João tomou seis. Quantos refrigerantes restaram?	TM
AP6	Lucas tem 12 figurinhas de Pokémon e 25 de Digimon. Quantas figurinhas ele tem ao todo?	CM
AP7	Pedro colecionava selos. Hoje ganhou 23 selos ficando com 417 selos em sua coleção. Quantos selos ele tinha antes?	TM
AP8	Ingride tem R$ 12,00 reais a mais que ligiane, Se Ligiane possui R$ 27,00 reais, quantos reais Ingride tem?	COP
AP9	Ana ganhou em sua festa de aniversario 2 vestidos vermelhos e 5 vestidos amarelos, quantos vestidos Ana ganhou ao todo?	CM

Fonte: Do Autor

Figura 57 – Protótipo em papel



Fonte: O autor

5.3 Materiais

Na figura 57 aparece um protótipo de baixa fidelidade construído em papel utilizado para antecipar situações de uso e possíveis contingências percebidas ainda na fase inicial do desenvolvimento(SNYDER, 2003). Neste contexto, o protótipo da figura 57 advém do trabalho realizado pelos autores Queiroz et al. (2010) e foi construído com cartolina, lápis hidrocor, cola e transparências. Na figura 57 (f) aparecem duas mãos, posicionada à direita da figura 57(f), está a mão do participante, que interage com o protótipo para resolver as situações aditivas do quadro 10. Posicionada à esquerda da figura 57(f) está a mão do pesquisador, que gera os estados atingíveis da interface simulando as interações do quadro 11.

5.4 Métodologia

Com um protótipo em papel como proposto por Snyder (2003) e, em horário previamente agendado, os participantes foram visitados nas escolas onde trabalhavam e sentados diante do protótipo em papel da figura 57, iniciaram a resolução das situações-problema. Neste cenário, estiveram presentes o participante, o facilitador da interação, que assume o papel do computador gerando os estados atingíveis da interface e o operador de câmera. Os participantes tiveram suas verbalizações gravadas e suas mãos foram filmadas.

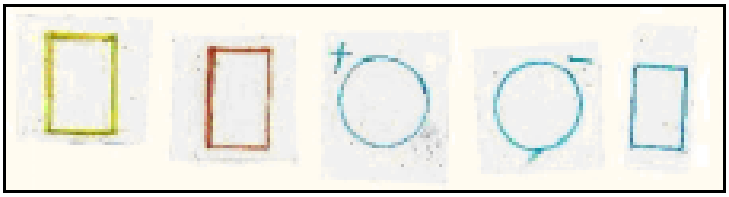
5.5 Experimento

Como pode ser visto na figura 57, o participante, sentado em uma mesa, com o protótipo em papel disponível em seu campo visual e um gravador em cima da mesa, recebeu explicações sobre o protótipo e sobre as estruturas aditivas e foi informado de que suas mãos seriam filmadas e sua voz seria gravada. Além disso, recebeu os formulários de consentimento e de identificação do perfil presente no ANEXO B. No final da resolução de cada situação-problema os participantes responderam as perguntas presentes na entrevista do ANEXO C. - Após a resolução de problema. No final das nove(09) situações-problema, os participantes responderam as perguntas do ANEXO D. Perguntas realizadas após tarefas. Ao todo, foram resolvidas nove(09) situações-problemas com indicativos e posteriormente as mesmas (nove) nove sem indicativos.

Como pode ser visto na figura 59, o quadrado aparece três vezes no diagrama de Composição de Medidas e duas vezes nos diagramas de Transformação de Medidas e Comparação de Medidas como visto na figura 60. Logo, para ajudar o participante a distinguir os papéis exercidos pelo quadrado presente em cada diagrama, foram escolhidas três cores: **azul**, **amarelo** e **vermelho**, como vistos na figura 58. As cores, portanto, serviram como indicativos, elementos cuja presença em cima de algum elemento no texto, indicaria a posição dele no diagrama. A figura 58, mostra três quadrados de cores diferentes e dois círculos acompanhados do sinal positivo e do sinal negativo, já na figura 59 aparece um diagrama correspondente a categoria de Composição de Medidas cujo quadrado amarelo representa o **Todo** da Composição de Medidas. Sendo assim, para ajudar na identificação dos elementos no texto, as formas coloridas da figura 58 foram colocadas em cima do texto mostrando assim, sua posição no diagrama.

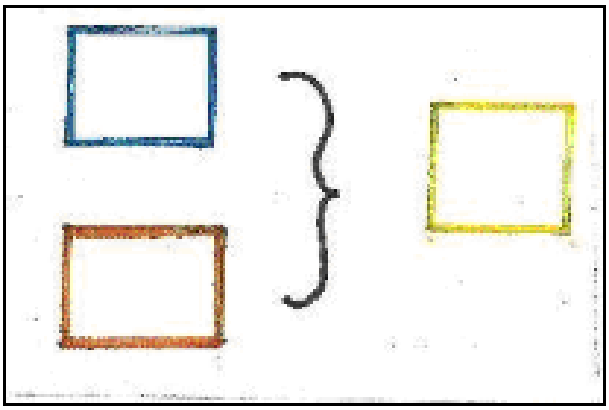
Na figura 60 corresponde a um diagrama de Comparação de Medidas, onde aparece um círculo, acompanhado de um sinal positivo ou negativo usado para representar o valor relativo. Por esse motivo, o número no texto, representativo da relação foi marcado com um círculo acompanhado do sinal negativo ou do sinal positivo como visto na figura 60. Se a tarefa fosse concluída com sucesso, outros números iam sendo marcados e, em seguida, posicionados; entretanto, quando havia erro, a interface mostrava uma mensagem como

Figura 58 – Exemplos do uso de cores e formas



Fonte: O autor

Figura 59 – Exemplo do uso de cores para diferenciar os elementos do texto



Fonte: O autor

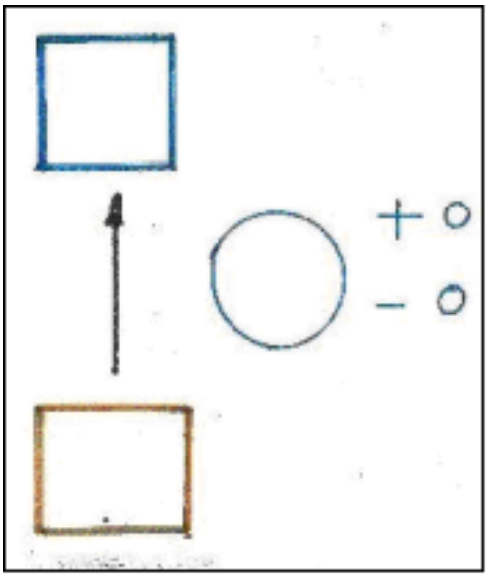
exemplificada na figura 61, (b) indicando que houve erro na escolha da categoria a qual pertence a situação-problema mostrando uma pergunta.

A figura 61(a) aparece uma pergunta sobre a escolha do sinal que acompanha o número relativo. A figura 61(b) aparece uma mensagem que não indica erro, solicita, entretanto, que seja selecionada a categoria a qual pertence a situação-problema. Mensagens como essas da figura 61 apareciam na interface interferindo na resolução da situação-problema e, por conseguinte, favorecendo a percepção de padrões observáveis em cada situação-problema. Neste caso, não havia nenhum indicativo, nem sobre os elementos do texto, nem sobre os elementos do diagrama. O participante, então, selecionava qualquer número no texto e, em seguida, sem nenhum indicativo, posicionava tal número no diagrama. Quando havia erro, no entanto, a interface mostrava mensagens com perguntas sobre ação realizada e exemplificadas na figura 61. As perguntas foram, portanto, usadas para proporcionar reflexão sobre cada passo presente na resolução da situação-problema.

5.6 Resultados

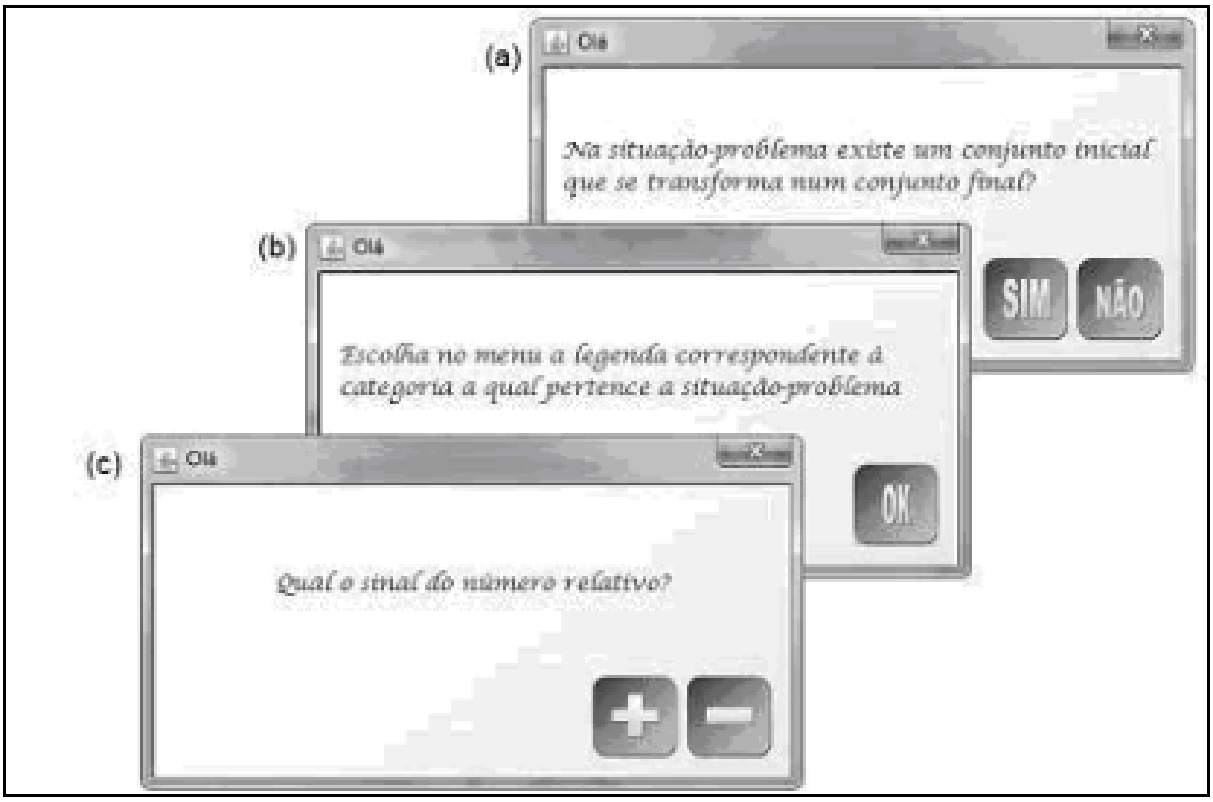
Cada linha do quadro 11, representa uma ação. Resultados preliminares desse formato já foram encontrados por Queiroz et al. (2010), notadamente sobre aprendizagem de conceitos sobre Estruturas Aditivas. Nas colunas aparecem os descritores da ação, quais

Figura 60 – Comparação de Medidas



Fonte: O autor

Figura 61 – Mensagens de feedback no Gerard



Fonte: O autor

Figura 62 – Unidade de Análise

A
- Computador: Resolva essa questão
- Computador: Rafael tinha dez refrigerantes e João tomou seis. Quantos refrigerantes restaram?
- Computador: Escolha no menu a legenda corresponde a categoria a qual pertence a situação-problema.

B
- S(15-06-10): transformação (clicou em transformação)

C
- Entrevistador: Você escolheu transformação para esta situação-problema, como você explicaria isso?

D
- Professor (a) : primeiro eu analisei o contexto do probleminha, e dentro daquela lógica que as medidas iriam sofrer mudanças, uma em relação a outra, ocorreu uma transformação, foi pelo contexto.

Fonte: O autor

sejam: **representação**, **figura**, **função** e **modalidades de interação**. Por exemplo, a **chave**, representativa da categoria de composição de medidas, foi manipulada pelo **U**: usuário e pelo **C**: computador por meio da **MD**: manipulação direta. Sempre que uma situações-problema do quadro 10 era iniciada, cada operação, (de matemática, de mouse ou mental) constituinte do processo de resolução, resultava em uma ação. Para cada ação concluída, o participante respondia à entrevista do ANEXO C e do ANEXO D. Ao todo, foram feitas (29) vinte e nove perguntas, que versaram sobre estratégia de resolução, motivos de escolha, significado de elementos (números e figuras) e conhecimentos antes e depois da vivência. A transcrição seguiu o formato da unidade de análise mostrada na figura 62, que está subdividida em quatro partes: (A) é um conjunto limitado de ações realizadas pelo computador, ou seja, textos das situações-problema, mensagens pré-formatadas e *feedback*; (B) é o conjunto de ações realizadas pelo usuário, como presentes no quadro 8; (C) aparecem as perguntas realizadas do ANEXO C e do ANEXO D. Já na linha (D), estão as respostas do usuário. No final do processo, os vídeos e gravações foram transcritos totalizando (09) nove protocolos verbais, um para cada professor. Ao todo, foram geradas (quinhentos e noventa) 590 unidades de análise, que foram, em seguida, qualitativamente analisadas com o software Qualrus(BRENT; SLUSARZ; THOMPSON, 2002b).

Para efeito de amostragem, apresentamos no quadro 12, a seguir, os conceitos percebidos na tarefa um (01) do 8 de **Selecionar Categoria**, entretanto, além dos conceitos

Quadro 11 – Legenda: ANT: Anotação temporária em cima dos números; MD: Manipulação direta; MO: Menu com duas opções; U: Manipulado pelo usuário; C: Manipulado pelo computador

			Modalidades de Interação		
Representação	Figura	Função	MD	ATN	MO
Chave		Representar a categoria de Composição de medidas ou grandezas.	U,C		
Quadrado colorido		Marcar os elementos no texto	U,C	C	
Círculo colorido		Marcar os elementos no texto	U,C	C	
Quadrado		Representar uma medida ou um número natural.	U,C	C	
Círculo		Representar o número relativo	U,C	C	
Seta Vertical		Representar a categoria de Transformação	U,C		
Seta horizontal		Representa a categoria de Comparação	U,C		
Número natural		Representar uma quantidade	U		
Número relativo		Representar uma relação	U,C	C	
Sinal		Indicador de relação negativa ou positiva		C	U
Menu de categorias		Oferecer opções de escolha das categorias	U	C	
Texto da situação-problema		Comunicar os elementos e relações presentes na situação-problema			

Fonte: Do Autor

presentes no quadro 12 os elementos do quadro 13 estiveram presentes e influenciaram a ação, por esse motivo, convém mostrar tais elementos ordenando-os por predominância.

Quadro 12 – Conceitos que predominaram nas situações-problema

Conceitos	Sigla
Conceito de número e sua relação com os conjuntos	CNRC:
Conceito de transformação de medidas;	CTM:
Conceito de composição de medidas;	CCM:
Conceito de comparação de medidas;	CCOM:
Inversão	CI
Conceito de adição;	CA:
Conceito de subtração	CS:
Conceito de temporalidade;	CT:

Fonte: Do Autor

No quadro 13 são exemplificados os elementos que, além dos presentes no auadro

Quadro 13 – Outros elementos presentes no discurso dos usuários.

Outros elementos	Qtd	Exemplo no texto
Organizadores da informação	20	Antes, agora, possuía, tinha
Mudança	8	Mudança
Diferença	7	Diferença
Erro	6	Ação diferente da esperada
Referência antiga	4	Forma de resolução tomando por base aquela já utilizada em sala de aula e que não mostra diferenças qualitativas entre as situações-problema
Seqüência	3	Identificação de ordem nas ações
Entender	3	Entender
Explicação ambígua	2	Uso de palavras polissêmicas que não favorecem a identificação de conceitos específicos
Contexto	1	Contexto
Percurso	1	Identificação de um caminho a seguir
Visão	1	Visão
Percepção do erro	1	O usuário foi capaz de perceber o próprio erro
Rever	1	O usuário identifica a necessidade de ler novamente a situação-problema
Confrontar	1	O usuário percebe que existe uma diferença entre o pretendido e o ocorrido
Base de comparação	1	O usuário percebe que para a categoria de Comparação de Medidas existe uma referência a partir da qual a comparação é realizada
Pergunta para confirmar ideia	1	Antes de passar para o próximo passo, os usuários sentem necessidade de obter feedback de suas ações
Igualdade de elementos	1	Os usuários identificam relações entre elementos dentro de uma mesma situação problema, ou situações-problemas diferentes.

Fonte: Do Autor

12 estiveram presentes no discurso dos participantes durante a resolução da tarefa de **Selecionar Categoria**. Por exemplo, os **organizadores da informação** apareceram (20) vinte vezes, já a palavra **mudança** aparece (08) oito vezes. Isso mostra que, primeiramente, os participantes organizam a informação e, em seguida, resolvem a situação-problema. Continuando, além dos elementos presentes nos quadro 12 e quadro 13 foram percebidas associações existentes entre os conceitos do quadro 12 e quadro 14 suas representações metafóricas. No quadro 14 aparecem as associações percebidas entre conceitos e os elementos constitutivos da representação. Contudo, nas linhas sombreadas existem associações equivocadas. Por exemplo, na linha quatro(04) é feita uma associação entre a **chave** e o conceito de comparação de medidas, quando na verdade, esse elemento, segundo a representação presente no 1 ao conceito de composição de medidas. Além disso, tais associações equivocadas conduziram a erro. Isso sugere que os elementos representativos de cada categoria devam ser melhor explicitados, favorecendo, dessa forma, a correta

Quadro 14 – CNRC – Conceito de número e sua relação com medidas, CTM – Conceito de Transformação de Medidas, CT – Conceito de Temporalidade, CCM – Conceito de Composição de Medidas, CCOM-Conceito de Comparação de Medidas

Linha	Conceitos	Representação
1	CNRC, CCOM	Seta vertical
2	CTM, CT	Seta Horizontal
3	CCM	Chave
4	CNRC, CCM, CCOM	Chave
5	CT, CTM,	Seta Horizontal
6	CCOM;	Seta Vertical
7	CCM (1), CTM (1)	Chave(1), seta horizontal(1)

Fonte: Do Autor

distinção entre categorias.

Além das associações entre conceitos e elementos da representação, presentes no quadro 14, convém mostrar relacionamentos, potencialmente existentes, entre os elementos da representação da figura 55 e os elementos do quadro 13 . Por exemplo, as relações existentes entre a representação adotada e a emergência de **organizadores da informação** aparecem, a seguir, no quadro 15.

Quadro 15 – Relacionamentos entre a representação e elementos do Quadro 13

Categoria	Representação	Outros elementos	Qtd	Total
Comparação	Seta vertical	Organizadores da informação (9), diferença (7), sequência (2), confrontar, base de comparação	9	11
Transformação	Seta Horizontal	Organizadores da informação (7), mudança (8), pergunta para confirmar a ideia (1)	8	12
Composição	Chave	Organizadores da informação (4), referência antiga (4)	4	10
Transformação	Chave	Entender (3), Contexto, percurso, referência antiga, visão, igualdade de elementos, erro(4)	4	12
Composição	Seta horizontal (2) Seta Vertical (1)	Erro, percepção do erro, rever, visão, pronome pessoal, sequência	3	10
Comparação	Chave (1), seta horizontal (1)	Erro (2), explicação ambígua (2), pronome pessoal	2	1

Fonte: Do Autor

No quadro 15 aparecem três linhas brancas e três linhas sombreadas. Nas brancas, ocorreu acerto, nas sombreadas, erro. Quando houve acerto, estavam presentes os organizadores da informação. Por exemplo, eles apareceram, por nove (09) vezes na linha (01), por sete (07) vezes na linha (02) e por quatro (04) vezes na linha (03). Nas linhas quatro (04), cinco (05) e seis (06) houve erro e, nessas situações, os organizadores da informação estavam ausentes. Logo, isto sugere que as associações equivocadas presentes nas linhas quatro (04), cinco (05) e seis (06) possam ser decorrentes da ausência dos organizadores da informação. Por exemplo, na linha quatro(04) a categoria de Transformação aplicada a uma medida foi, equivocadamente, associada a chave, quando, na verdade, deveria ter sido associada a seta horizontal. A predominância dos organizadores da informação nas situações de acerto mostra que é necessário, primeiramente, entender a situação-problema e, em seguida, escolher a categoria adequada. Neste contexto, cada elemento, constitutivo da representação, foi manipulado.

Analisemos, a seguir, no quadro 16 potenciais associações entre as modalidades de interação do quadro 11 e os conceitos presentes no quadro 12. Por exemplo, na linha (01) um do quadro 16 , quando a **chave** foi manipulada por meio da manipulação direta com protocolo de mouse **selecionar**, emergiram no discurso dos usuários conceitos sobre Composição de Medidas; entretanto, além desses, estiveram presentes referências antigas, assim como organizadores da informação. Na linha dois (02), quando **quadrados** foram colocados em cima do texto, surgiu a palavra **sequência**. Ou seja, no texto, o número a ser posicionado no diagrama apareceu marcado com um quadrado, logo, os participantes seguiram a ordem sugerida. Como visto na linha cinco (05) quando a **seta horizontal** foi manipulada, segundo protocolo de mouse **selecionar**, emergiram conceitos de Transformação de Medidas, Composição de Medidas e Número relativo, bem como surgiram os elementos: **direção, percurso e formulação de hipóteses sobre o ponto de partida**. Já na linha seis(06), no momento em que a **seta vertical** foi manipulada, o referido e o referendo foram percebidos, bem como emergiram conceitos de Comparação de Medidas. Além disso, surgiu a palavra **paralelo**.

Nas linhas um(01), cinco(05) e seis(06), a chave e as setas foram manipulados por meio da **MD: Manipulação Direta** com protocolo de mouse **selecionar**. Na entrevista, enquanto explicavam suas ações, os participantes, gesticulando, mostravam o formato da figura escolhida. Entretanto, tais gestos, nem sempre refletiam corretamente a figura selecionada. Em outras palavras, às vezes, embora a seta **vertical** tenha sido escolhida, os gestos mostravam um movimento **horizontal**. Isso sugere que o protocolo de mouse **selecionar** não favorece a percepção do formato da chave, nem do sentido das setas.

Após analisar potenciais associações entre as tarefas do quadro 8, os elementos da figura 55 bem como as modalidades de interação do quadro 11. Os resultados permitiram generalizar que as situações-problema pertencentes a categoria de Transformação de

Quadro 16 – Legenda: ANT: Anotação temporária em cima dos números; MD: Manipulação direta; MO: Menu com duas opções; U: Manipulado pelo usuário; C: Manipulado pelo computador

Contexto da ação						Elementos na ação
Representação	Figura	Função	MD	ATN	MO	
Chave		Representar a categoria de Composição de medidas ou grandezas.	U,C			CCM, referências antigas e Organizadores da informação
Quadrado colorido em cima do texto		Marcar os elementos no texto	U,C	C		Sequência, Explicação ambígua
Quadrado		Representar uma medida ou um número natural.	U,C	C		Percepção do erro, ausência de atenção , diferença, hipótese sobre ponto de chegada, Explicação ambígua
Círculo		Representar o número relativo	U,C	C		Sinal negativo, transcendendo ao contexto da ação, experiência, conceito de inversão, hipótese sobre ponto de chegada, indicação, não percebeu imagem, operação associada ao sinal, hipótese sobre ponto de partida
Seta horizontal		Representar a categoria de Transformação	U,C			CTM, CCM, NR , percebeu forma da seta horizontal, hipótese sobre ponto de partida, começo, mudança , indicativo, percurso, sequencia, direção
Seta vertical		Representa a categoria de Comparação	U,C			COMP, indicação, paralelo, elemento presente, referendo, referido
Número natural		Representar uma quantidade	U			Resultado (10), Erro (9), Cálculo Mental (5), Hipótese sobre ponto de chegada (5), Mudança (3) ,Item desconhecido(3), Explicação ambígua(3), Diferença(2),Operação (2), Refazer(2),
Número relativo		Representar uma relação	U,C	C		Sinal negativo (5), Ambiguidade entre a operação e o sinal do número relativo(4),Número relativo (3), Erro (3), diferença (3), Resultado (2),
Sinal		Indicador de relação negativa ou positiva		C	U	Ambiguidade entre a operação e o sinal do número relativo, Sinal negativo, diferença, erro , número relativo.
Texto da situação-problema		Comunicar os elementos e relações presentes na situação-problema				

Fonte: Do Autor

Medidas apresentaram a maior predominância de erros e, além disso, nas explicações para tal escolha, seja certa ou errada, apareciam mais elementos do que nas situações do tipo Composição de Medidas e Comparação de Medidas. Logo, isso sugere que, essa maior quantidade de elementos, presentes nas explicações dos participantes, pode indicar que eles tinham ideias confusas sobre o conceito de Transformação de Medidas. Além disso, verificou-se ainda que predominou a associação equivocada entre Composição de Medidas e Transformação de Medidas. Contudo, embora essa associação tenha predominado, ela não influenciou o cálculo mental realizado na operação realizadas para encontrar o item desconhecido.

5.6.1 Retirada gradativa da ajuda

Durante a resolução das resolução das situações-problema do quadro 2, a interface oferecia ajudas: cores e formas mostradas na figura 35, bem como mensagens como mostradas na figura 61; entretanto, apenas o participante com menor escolaridade percebeu as formas e cores durante a resolução da primeira situação-problema. Para os demais, a percepção das cores aconteceu ou após a resolução de várias situações-problema ou durante a entrevista, no momento em que o pesquisador, perguntava sobre os motivos das ações e, assim, explicitava a cor do elemento manipulado. A participante com menor escolaridade, aqui demonimada de Marta, dizia: "*foi fácil: eu fui pela cor, coloquei amarelo com amarelo e azul com azul*"; entretanto, apesar de dizer que foi fácil, apenas, na presença das ajudas, essa participante apresentava melhores resultados, todavia, na ausência das cores e formas, cometia vários erros e erros consecutivos.

Diante de sua inabilidade para executar a tarefa sem as ajudas exemplificadas na figura 35, Marta tomava a iniciativa de pegar tais elementos, disponíveis em cima da mesa e os colocava, equivocadamente, sobre os números do texto. Já os demais participantes diziam: "*na verdade, eu não percebi a cor amarela, eu fui pelo que sabia.*". No quadro 17 aparecem três linhas, a primeira sombreada em tom escuro de cinza para denotar a presença completa das ajudas, cores e formas. A segunda sombreada em cinza claro, denotando a presença de um tipo de ajuda, as formas. E a terceira sem sombreamento, para indicar que não houve nenhum tipo de ajuda. Além disso, mostra a ocorrência dos conceitos do quadro 12, bem como dos elementos do quadro 13 durante a retirada gradativa desses indicativos. Na linha (01) aparecem (04) quatro conceitos. Na linha (02) aparecem três (03) conceitos, além de explicações ambíguas. Na linha três (03), no entanto, não aparece nenhum conceito.

Nessas ocasiões, nas quais não houve nenhum tipo de ajuda, Marta dizia se sentir sozinha e ter necessidade de ajuda. Vê-se, portanto, no quadro 17 que à medida que os indicativos iam sendo removidos, diminuía, gradativamente, a emergência tanto dos conceitos do quadro 12 quanto dos elementos do quadro 13. Entretanto, essa diminuição

Quadro 17 – Tarefa de Composição de Medidas. CNRC – Conceito de número e sua relação com medidas, CTM – Conceito de Transformação de Medidas, CT – Conceito de Temporalidade, CCM – Conceito de Composição de Medidas.

Categoria	Indicativos	Representações	Outros	Conceitos	Qtd	Total
Composição de medidas	Cores e formas	Número e Quadrado	Organizadores da informação (1), sequência (3), organização (1), pergunta para confirmar ideia (1), explicação ambígua (1), repetição da pergunta (1), cor e forma (1)	CNRC, CTM, CT, CCM	5	7
	Formas	Número e Quadrado	explicação ambígua(1)	CNRC. CTM , CCM	2	
	nenhum	Número e Quadrado	fazer sozinha(1), necessidade (1)		2	

Fonte: Do Autor

só foi, evidentemente, percebida para duas participantes: Marta, aquela com menor escolaridade, e outra que, à época assumia a função de coordenadora pedagógica e, por conseguinte, não estava em sala de aula. Os demais, no entanto, disseram que suas ações não haviam sido influenciadas pelas cores e formas, logo, para esse grupo, não foi possível perceber distinções entre a presença e a ausência das ajudas.

A mesma diminuição de conceitos, mostrada no quadro 17, foi observada na retirada gradativa das ajudas para as situações-problemas do tipo Transformação de Medidas e Comparação de Medidas. Isto sugere que, especificamente, para os dois participantes que apresentaram pouca habilidade em resolver situações-problemas, a emergência tanto dos conceitos do quadro 12 quanto dos elementos do quadro 13 podem ter sido influenciadas pela presença das cores e formas. Em outras palavras, para dois participantes: um com baixa escolaridade e outro fora da sala de aula, na ausência dos indicativos, houve pouca ou nenhuma verbalização de conceitos. Entretanto, cabe pontuar que, embora a presença das cores e formas tenha ajudado tais participantes a realizar as tarefas, a presença dessas, não influenciou o desenvolvimento de autonomia. Ou seja, na ausência das ajudas, o participante de mais baixa escolaridade, voltava a cometer os mesmos erros, acentuando-se o fato de que, além disso, ela dizia se sentir sozinha.

5.6.2 Elemento mais significativo

O participante com maior escolaridade disse ser o número relativo, o todo da composição, bem como a base da comparação, os principais elementos da situação-problema. Ou seja, aqueles que eram procurados, buscados no enunciado. O trecho, a seguir, mostra o protocolo verbal do participante com a maior escolaridade explicando seu pensamento nos momentos em que via o diagrama.

"*S13.07.10: Na verdade quando a gente vê o diagrama né? vem aquela dúvida, onde é que você vai botar cada elemento, né? Ai depois que você vai ler e vai descobrir qual é o valor relativo ai é que você vai identificar, né? Qual é o valor relativo e ai depois que você descobre qual é o valor relativo, ai fica mais fácil a relação do valor inicial e o final*".

Esse participante é estudante do curso de graduação em Matemática e atua no Ensino Fundamental do primeiro ao quinto ano. Vê-se, nas suas explicações, a necessidade de buscar o **valor relativo** que, segundo ele, indicaria a categoria de **Transformação aplicada a uma medida**. Além disso, no Quadro 18, a seguir, vê-se que durante a resolução das situações-problema, o participante, movendo as mãos em direção a elementos específicos do texto, tentou rearranjá-lo para encontrar a **base da comparação**. A escolha da categoria, quaisquer que fossem: **Composição, Comparação ou Transformação** foi, portanto, influenciada pela escolaridade de cada participante.

Quadro 18 – Protocolo verbal versus necessidades de novas modalidades de interação.

Situação-Problema: Ana tem sete vestidos, dois são vermelhos. Quantos são os amarelos?
Transcrição
Entrevistador: tendo recebido essa mensagem você apontou com o dedo alguns elementos da situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): então, no inicio eu tinha colocado na minha cabeça, aquelas duas informações iniciais, que estaria comparando vermelhos com amarelos, deu uma compreensão equivocada, ai coloquei isso dentro de mim, tava tentando ser teimosa com isso.
Entrevistador: você escolheu comparação para esta situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): teimosia agora, ainda tava imaginado que seria assim. Não tava conseguindo vê as outras, a possibilidade de as outras estarem nela, eu olhava transformação, composição, mas não achava elementos que me davam a entender que não seria comparação
Entrevistador: você recebeu uma mensagem, que dizia "quando uma quantidade é comparada com outra quantidade" o que você entendeu, ou melhor, o que significou essa mensagem para você na situação-problema? Professor (a): ai eu voltei para a situação-problema e busquei outra base de comparação, ai, eu não achei, não achei uma única informação, não estava comparando nada
Entrevistador: tendo recebido a mensagem, novamente você aponta com os dedos elementos da situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): eu tava tentando entender o todo, quando eu fiz isso, aquele movimento para o 7 eu tava tentando achar o todo e ai já encaixar em uma outra categoria

Fonte: Do Autor

Na linha três(03) do quadro 18, o participante tentou encontrar o elemento base

da comparação cuja presença, segundo ele, indicaria que seu raciocínio estava correto; entretanto, tal elemento não foi encontrado e, portanto, concluiu que não se tratava de uma situação do tipo comparação de medidas. Além disso, vale salientar, que a busca pelo elemento, dito mais significativo, só aconteceu no final do experimento, depois que o participante já havia resolvido mais de cinco(05) situações-problema. Logo, a existência do elemento base da comparação, explicitamente identificado, por meio do quadrado localizado na parte inferior do diagrama, pode ter influenciado a busca por tal elemento presente no texto. Isso sugere que a necessidade de buscar e rearranjar os elementos do texto pode ter sido, portanto, decorrente da experiência de construir os diagramas correspondentes.

Nas linhas do quadro 18, foram identificados novos papéis para os elementos presentes no texto das situações-problema. Tais papéis, provenientes, agora, da interação entre usuário e a representação que, neste contexto, são os diagramas seus elementos e suas modalidades de interação apresentadas no quadro 11. O mesmo aconteceu para o valor relativo presente nas situações do tipo Transformação aplicada a uma medida, bem como para o elemento denominado **Todo** presente nas situações do tipo **Composição de medida**s. Percebe-se, portanto, que, especificamente, na tarefa de **escolher a categoria a qual pertence a situação-problema** e, notadamente, para o participante com mais alta escolaridade, houve a necessidade de mais duas modalidades de interação sobre elementos presentes no texto. No quadro 19, a seguir, aparecem as necessidades de manipulação apresentadas pelo participante com maior escolaridade. O quadro 19

Quadro 19 – Contingências observadas nos usuários com mais alta escolaridade.

Contingências observadas	
Elemento	Modalidade de interação
Base da Comparação	Busca no texto
Número Relativo Todo da Composição	
Texto	Rearranjar

Fonte: Do Autor

exemplifica contingências observadas durante o experimento, o participante com a maior escolaridade expressou a necessidade de rearranjar o texto para buscar o número relativo, a base da comparação e o todo da composição, identificados, por ele, como os mais significativos da situação-problema. Ou seja, aqueles cuja presença ou ausência ajudaria no processo de categorização das situações-problema. Uma vez identificado, tal elemento passaria, portanto, a ser o primeiro posicionado no diagrama. Embora essa necessidade tenha sido percebida nas ações de apenas um participante, potenciais modalidades de interação sobre os elementos constitutivos da representação são o cerne da pesquisa que ora apresentamos e, logo, essa contingência goi vista como resultado. Os demais participantes, no entanto, não apresentaram nenhuma necessidade de novas mecanismos de interação.

Executavam suas ações, no entanto, segundo a marcação de elementos previamente realizada pela interface, sem identificar nenhum elemento como significativamente diferenciado em relação aos demais. Apenas a participante com maior escolaridade fez refletir nos gestos o seu racioncínio, já os demais, não foram capazes de tal projeção. Houve, portanto, uma discrepância nas necessdades, potencialmente influenciadas pela escolaridade.

5.7 Discussão

Selva (2004) percebeu que quando foram usados gráficos de barras para somar quantidades, os participantes perdiam a referência do ponto zero e, além disso, quando iam representar quantidades crescentes, esqueciam o padrão de crescimento existente nas quantidades. Harries e Suggate (2006), por seu turno, perceberam que no uso da reta numérica, era necessário marcar pontos e executar ciclos e, na direção contrária, para interpretar ciclos era necessário ler os pontos previamente marcados. Entretanto, essas ações eram mentais, não havendo, portanto, movimento de mãos. Nessa mesma linha, Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001) mostraram que para informações variacionais em gráficos fossem percebidos, era necessário uma análise global desses. Percebeu-se ainda que houve uma facilidade maior em ler e interpretar os gráficos de que construí-los, e trabalhar com a representação dos dados nominais foi, em geral, mais fácil de que com a representação de dados ordinais.

Segundo Singer (2009) os objetos são melhor categorizados se puderem ser movimentados. Por exemplo, as tarefas, propostas por Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001), Harries e Suggate (2006), Selva (2004), foram realizadas com lápis e papel, não oferecendo, portanto, mecanismos de manipulação. Nesse sentido, Kaput, Noss e Hoyles (2002) defende que para entender como notações são usadas para construir significados é preciso permitir que dispositivos notacionais sejam flexíveis. Neste contexto, significa oferecer, sobre os elementos da figura 55, não só as diferentes modalidades de interação do quadro 16, mas também as contingências observadas no quadro 19. A flexibilidade de manipulação sobre cada elemento constitutivos da interface favorecerá, portanto, tanto a percepção de elementos presentes na interface quanto sua significação, que, segundo Gérard (1998), é favorecida quando é possível perceber que o mesmo elemento pode assumir variados papeis tanto numa mesma situação-problema quanto em diferentes situações-problema.

5.7.1 Influências da manipulação na percepção dos elementos constitutivos da representação

A figura 63 esta dividida em dois lados: no lado direito aparecem duas expressões trigonométricas [1], enquanto que no lado esquerdo parace a interface do Super Tangram[2] proposta por (SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001), onde aparecem triângulos, trapézios e losangos [3]. Mediante rotações e translações [4], a posição desses elementos pode ser modificada. Entretanto, para evidenciar que operações de rotação e translação subjazem em tais modificações, foram colocados, sobre os elementos, um **arco de circunferência**, e nesse, dois **pontos de controle:** um **em cima do arco na ponta da seta, e outro, no centro**. O arco de circunferência foi usado para representar o conceito de rotação. O ponto de controle em cima do arco possibilitou que usuários modificassem o ângulo de rotação do arco e o ponto de controle presente o centro possibilitou a modificação do centro de rotação. Dessa forma, a proposta por Sedig, Klawe e Westrom (2001) permitiu a manipulação de dois pontos de controle e, por conseguinte, colaborou para evidenciar a existência do ângulo e do raio, presentes no conceito de rotação, representada nas expressões trigonométricas presentes no lado direito da 63. Esses pontos serviram, portanto, para mostrar a existência de uma operação de rotação, potencialmente identificada tanto pelo movimento, realizado com as mãos, quanto pela presença do ângulo e do raio.

Além disso, do lado direito da figura 63 aparecem duas equações trigonométricas, sendo, x' e y' os elementos que receberão a resultante de tais equações, indicando assim, a nova posição atingida após as operações de rotação e translação. Manipular esses dois pontos de controle, serviu, portanto, para mostrar que o arco de circunferência apresenta propriedades contíguas ao conceito de rotação e, por conseguinte, permite que o usuário manipule as dimensões do conceito, quais sejam: o ângulo de rotação e o centro da rotação SEDIG; KLAWE; WESTROM, op. cit.. Dessa forma, estima-se que tais elementos sejam percebidos como propriedades tanto da representação quanto do conceito metaforicamente representado, favorecendo, assim sua significação.

Nesse sentido, Sedig, Klawe e Westrom (2001) advogam que, além de manipular os elementos constitutivos da representação, é necessário, além disso, identificar os protocolos de mouse que mais salientaram aspectos essenciais do conceito. Por exemplo, a **chave**, bem como a **setas** foram manipulados com o protocolo de mouse **selecionar** e para explicar suas escolhas, alguns participantes, além de verbalizarem, faziam gestos com as

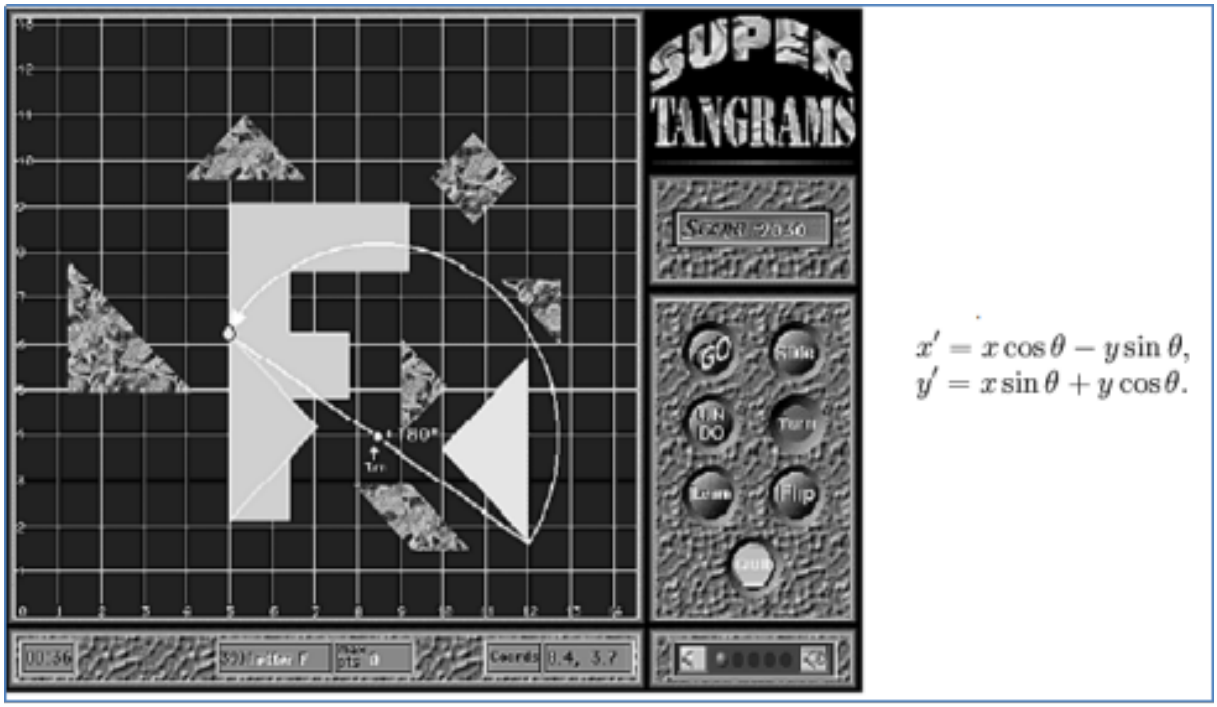
[1] Transformações trigonométricas são as fórmulas que facilitam o cálculo das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente da soma, do arco duplo, entre outras situações. Seno, cosseno e tangente são algumas das razões trigonométricas.

[2] O Tangram é um quebra-cabeças com 07 peças, todas no formato de figuras geométricas planas

[3] O losango é um paralelogramo com 4 lados congruentes. O trapézio é um quadrilátero com 1 par de lados paralelos, chamados de bases

[4] Ao conservar as formas, ou seja, mantendo os comprimentos e os ângulos, podemos realizar três transformações geométricas: translação, rotação e reflexão

Figura 63 – Elementos na representação e no conceito de rotação



Fonte: (SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001)

mãos. Entretanto, quando era escolhida a seta vertical, por exemplo, alguns participantes faziam gestos que mostravam a seta horizontal, ou vice versa. Em outras palavras, o protocolo de mouse **selecionar** não favoreceu nem a percepção de formato, nem do sentido presentes nas setas. Nesse sentido, nossos achados se coadunam com Sedig, Klawe e Westrom (2001), pois o uso dos protocolos de mouse podem ou não salientar aspectos essenciais de determinados conceitos e, além disso, os resultados mostrados no quadro 16 se coadunam com os encontrados por De-Souza e Sedig (2001), Queiroz et al. (2010), Sedig, Klawe e Westrom (2001) uma vez que, identifica, além dos elementos pertencentes à dimensão cognitiva, a manipulação sobre os elementos constitutivos da representação como sendo influenciadora tanto da percepção dos elementos quanto da sua significação.

5.7.2 Elemento mais significativo e a influencia da escolaridade

O participante de maior escolaridade tentou buscar o elemento do diagrama denominado de **base da comparação** e o elemento denominado de **número relativo** fazendo um movimento de mãos em direção ao texto. Nesse movimento, parecia querer dividir o texto, fragmentá-lo, alterar a sua configuração espacial para explicitar o elemento, denominado por ele de **principal**. Em suas explicações, disse que identificar tal elemento no texto, facilitaria distinguir as categorias e, portanto, a categorização tornava-se mais rápida e fácil. Já os usuários de mais baixa escolaridade não perceberam nenhum elemento como mais significativo e resolveram as situação-problemas propostas seguindo a sequência

sugerida na interface.

Elia, Gagatsis e Demetriou (2007) apontam a representação verbal ou texto como primeira referência para a resolução da situação-problema. Neste estudo, as ações na interface foram guiadas pelo significado do texto. Isto sugere que, sendo o texto mais conhecido, ele tenha sido utilizado como referência para construir o diagrama. Entretanto, existem regularidades específicas de cada diagrama, somente percebidas, durante a vivência de construí-los. Esses resultados se coadunam com os encontrados por Ibid.. Entretanto, avançam mostrando que, desde que haja meio de interação, neste caso, os diagramas manipuláveis, sua construção pode influenciar na nova significação do texto, e, por conseguinte, servir como nova referência para a tomada de decisão. Isso se comprovou para o participante de maior escolaridade que após a resolução de cinco (05) situações-problema, passou a querer fragmentar o texto para encontrar o elemento, considerado por ele, como mais significativo.

5.7.3 Tarefas com e sem ajuda

Segundo Sedighian e Westrom (1997), interações com representações visuais de conceitos são utilizadas para promover contato direto com conceitos, favorecendo, dessa forma, a passagem gradativa, de um estágio intuitivo de entendimento para um estágio reflexivo (SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001). Essa transição é referida na literatura como *Scaffolding*[5], que é metaforizada na interface computacional por meio do estilo de interação denominado RDCM – Manipulação Direta de Conceitos Reflexiva, voltado para oferecer *feedbacks* visuais que orientem as ações na interface SEDIG; KLAWE; WESTROM, op. cit.. Neste contexto, além das ajudas já utilizadas por Queiroz e Gomes (2008), Queiroz et al. (2010) foram adicionadas as formas e cores da figura 58, as quais foram escolhidas pela sua presença no diagrama, já para as cores, entretanto, não houve motivo significativo para a escolha. O participante, notadamente com o menor grau de escolaridade, apresentou algumas discrepâncias: tinha pouca atenção às tarefas, ficava muito nervoso durante o experimento e embora com horário previamente marcado, apresentava desculpas para não participar das sessões. A falta de atenção advinda de participantes com menor escolaridade já havia sido observada por(QUEIROZ et al., 2010); entretanto, foi o único a perceber cores e formas ainda durante a resolução da primeira situação-problema. Os demais, quando perceberam, aconteceu após a resolução de algumas situações-problema, ou durante a entrevista feita pelo pesquisador.

5.7.4 Tarefas com ajuda se torna mais difícil

Uma das maneiras de oferecer ajuda durante a resolução de situações-problema é problematiza-las mostrando todos os elementos presentes no cenário para evidenciá-

[5] Wood, Bruner e Ross (1976)

Figura 64 – Quadrado em cima do texto

Fonte: (MOURA, 2010)

los, tornando-os perceptíveis (REISER, 2002), que, segundo Ibid., torna as tarefas mais difíceis; entretanto, neste contexto, apenas uma participante, notadamente, uma das coordenadoras pedagógicas, disse que a presença das formas e cores tornava a tarefa mais difícil, pois, para posicionar cada elemento marcado, precisaria descobrir o seu local no diagrama, enquanto que na ausência das cores e formas, ela poderia posicioná-lo segundo sua intepretação. Como apenas uma participante externou tal opinião, não foi possível corroborar os resultados encontrados por Ibid. sobre tarefas com ajudas se tornarem mais difíceis. Como explicação, a participante, disse que sua dificuldade repousava na diminuição do grau de liberdade da ação, ou seja, ela não poderia nem mover qualquer elemento, nem tampouco posicioná-lo em qualquer local.

Neste contextos quadrados coloridos foram colocados em cima do texto, como pode ser visto na figura 64. A presença do quadrado sobre o número teve, portanto, dois significados: o primeiro foi indicar qual o elemento deveria ser arrastado, bem como o local do seu posicionamento; o segundo foi reduzir o grau de liberdade da ação, impedindo que outro elemento fosse selecionado. Neste cenário, não havia ônus sobre o erro. Ou seja, quando ocorria um erro, não havia nenhum tipo de punição ou perda de pontuação. A participante com o maior grau de escolaridade disse: "*mesmo sem saber, eu posso fazer, pois sei que a interface vai me ajuda*", se referindo, não às cores e formas da figura 35 - Transparências marcadas para realçar elementos do texto., mas às mensagens da figura 61 - Mensagens de *feedback* no Gerard. Em razão disso, a ocorrência de erro seguida da

ausência de punição pode, por conseguinte, ter favorecido a ausência de reflexão sobre a ação a ser executada. Contrariamente, segundo Sedig, Klawe e Westrom (2001), os aprendizes disseram que na ausência dos indicativos, precisaram lembrar a maneira como a ação havia sido anteriormente realizada. Em razão disso, disseram que as tarefas se tornaram mais difíceis. Neste contexto, apenas um participante percebeu as cores e formas. Logo, não foi possível corroborar os resultados de SEDIG; KLAWE; WESTROM, op. cit..

5.7.4.1 Retirada gradativa das formas e cores

As tarefas, aqui propostas, foram observadas não só na presença dos indicativos, mas também numa dinâmica de retirada gradativa dos elementos da figura 58: primeiramente, foram retiradas as cores e depois as formas, não houve motivo para essa ordem de retiradas. Os resultados mostrados aqui, se coadunam com os resultados obtidos por De-Souza e Sedig (2001), Sedig, Klawe e Westrom (2001), notadamente, no que se refere às perguntas nascidas na mente dos participantes durante a realização das ações sem indicativos. Entretanto, como a maioria dos participantes não percebeu as cores e formas, não foi possível estabelecer qualquer comparação entre a retirada gradativa das ajudas, mostrada no quadro 17 e os resultados encontrados por Ibid., ou seja, que na ausência dos indicativos, neste contexto, formas e cores em cima dos números, a tarefa se tornara mais difícil.

5.8 Conclusão

As ações que os participantes do quadro 20 conseguiram ou não fazer, no curso da tarefa, acompanhadas das suas verbalizações e dos seus gestos durante a da resolução da tarefa favoreceram identificar: (1) a potencial adequação da representação à atividade matemática; (2) a familiaridade dos estudantes com a representação utilizada, bem como sobre (3) as dificuldades dos estudantes no uso da representação. De posse dessas informações, obtêm-se elementos que servirão de insumos para refinar, como visto no Quadro 11, quadro 16 e Quadro 19 as modalidades de interação entre usuário e representações para conceitos específicos.

Os resultados, aqui obtidos, permitem mostrar que os indicativos, notadamente as mensagens da figura 61 evocaram nos participantes interpretações, as quais, por sua vez, orientaram as ações sobre na interface. Entretanto, embora essas interpretações sejam individuais, elas foram culturalmente construídas e serviram de heurísticas para entender a interface e tomar decisões. Os participantes, por seu turno, estabeleceram relações entre os elementos que estavam presentes no contexto e as ações em execução, favorecendo, além disso, momentos de reflexão sobre as tarefas executadas, bem como a construção de hipóteses sobre o caminho usado na construção do diagrama.

6 A conceitualização sobre soma e subtração no uso de representações diagramáticas em uma interface educativa.

6.1 Introdução

Em uma situação-problema como esta: Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficou com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra? Selter et al., (2011) distingue operação aritmética de formato aritmético. Por exemplo, para esta situação-problema, o formato aritmético seria: ? - 4 = 7; entretanto a operação aritmética é 7 + 4 = 11. No primeiro caso, a autora mostra o formato aritmético da situação-problema; no segundo caso, mostra a operação aritmética realizada para obter o resultado. Exemplos como este explicita a inversão existente entre as operações soma e subtração, somente percebida, por meio de uma mudança conceitual (PREDIGER, 2008; SELTER et al., 2012; VERGNAUD, 1986; GÉRARD, 1998).

A mudança conceitual ou conceitualização é caracterizada pela "*reconstrução do conhecimento anterior, quando este é confrontado com novas experiências e mudanças*"(PREDIGER, 2008, pg-04), tradução nossa. A exposição de aprendizes à resolução de variada situações-problema irá, portanto, favorecer o confronto, que possibilitará identificar possíveis conflitos entre o pretendido e o ocorrido. Sendo assim, a percepção de conceitos sobre soma e subtração acontece por meio de uma mudança conceitual (VERGNAUD, 1986; GÉRARD, 1998). Muitos pesquisadores têm observado a mudança conceitual para tornar mais claro tanto a maneira como se deu tal processo quanto os elementos que a influenciaram(MERENLUOTO; LEHTINEN, 2004; MILLER, 2000; VOSNIADOU et al., 2001; VOSNIADOU; VERSCHAFFEL, 2004). Nesta pesquisa, a mudança conceitual, potencialmente observada, ocorre no uso de uma interface educativa interativa denominada Gerard voltada para atividades matemáticas que envolvem soma e subtração.

6.2 O Gerard

Em interfaces de aplicativos o propósito é proporcionar ao usuário uma interação produtiva, fácil de usar e intuitiva, já nas interfaces educativas, o propósito é favorecer que o usuário seja engajado numa interação consciente sobre os conceitos metaforicamente representados e possa refletir sobre tais conceitos (SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001). Sendo assim, existe uma alta complexidade envolvida no design softwares educacionais,

Figura 65 – Interface do Gerard

Fonte: (MOURA, 2010)

uma vez que, além das questões relacionadas à facilidade de uso, o software ainda precisa engajar o aprendiz numa atividade consciente de construção do conhecimento SEDIG; KLAWE; WESTROM, op. cit.. Na figura 65, apresentamos o Gerard, interface educativa usada para ensinar soma e subtração.

O Gerard, como visto na figura 65, apresenta um menu com as funções de desfazer e refazer a ultima ação; três botões, uma chave, uma seta vertical e uma seta horizontal, representantes das categorias de Composição, Comparação e de Transformação, respectivamente. Um botão com o rótulo, "*qual o próximo passo?*" e um botão com o rótulo, "*mais dica*". Para resolver uma situação-problema proposta, os números, presentes no texto, são identificados e, em seguida, posicionados sobre o diagrama. Essas ações ocorrem por meio dos protocolos de *mouse*: **Selecionar, Posicionar, Orientar, Quantificar, Caminho e Texto** (SHNEIDERMAN, 1987). Dessa forma, estima-se, portanto, que manipular esses elementos, contribua na conceitualização ou mudança conceitual, ampliando, por conseguinte, o significado das situações-problema para os aprendizes. À luz dessas discussões anteriores, fazemos a seguinte pergunta de pesquisa: Quais elementos do Gerard que mais facilitaram o desenvolvimento de um apropriado modelo conceitual sobre soma e subtração?

6.2.1 Objetivos

- Observar a potencial influência de cada elemento da interface na mudança conceitual, especificamente sobre soma e subtração.
- Verificar como aconteceu tal influência na ausência dos indicativos ou ajudas.
- Observar como ocorreu a mudança conceitual numa dinâmica de retirada gradativa dos indicativos ou ajudas.

6.3 Métodologia

> Os processos que ocorrem na mente humana não são diretamente observáveis; em vez disso, são inferidos a partir de observações, classificações e medidas de vários tipos tendo como insumos informações contextuais.(GOLDIN, 1998a, pg-140) tradução nossa.

Em razão disso, para observar tais processos são realizados testes padronizados que podem revelar potenciais ordenações, mostrar padrões de respostas corretas e incorretas e mostrar a quantidade de passos para obter soluções por caminhos previamente definidos. Sendo assim, esse processo tornou-se cada vez mais sofisticado, no qual, tanto os elementos da interface quanto suas inter-relações juntamente às maneirsa como sujeitos examinam, manipulam, relacionam, criam e recriam elementos na interface constituem-se como meios para encontrar pistas sobre como os processos ocorrem na mente humana. Os motivos conscientes para gestos na interface podem oferecer indícios de como se deu a influência das expressões da representação usadas na interação. Tais indícios contribuem tanto para identificar possíveis transições entre estágios intermediários, potencialmente alcançados pelos aprendizes quanto à natureza de tais transições (PREDIGER, 2008). Sendo assim, as respostas, à questão acima aludida, resultam da observação tanto dos gestos, frente à tarefa, quanto das verbalizações.

6.4 Participantes

Os (25) vinte e cinco participantes do projeto de extensão intitulado: Formação de professores, estruturas aditivas, multiplicativas e análise qualitativa, aprovado com apoio do programa PIBIN da UNIVASF- Universidade Federal do Vale do São Francisco em parceria com a prefeitura de Juazeiro-BA, foram convidados; entretanto, desses (25) apenas (07) sete, presentes no quadro 20, participaram do experimento.

Os participantes do quadro 20, primeiramente, resolveram (10) dez situações presentes no quadro 21 - Situações-problema do campo aditivo presente no experimento,

Quadro 20 – Legenda: Legenda: PG: Pós-Graduação, MA: Matemática, EF: Ensino Fundamental, PU: Pública, P: Particular.

Professor	01	02	03	04	05	06	07
Sexo	M	F	M	F			F
Idade	45	30	48	30			35
Esc	PG	2°	PG	PG			PG
For	MA	MG	MA	MA			MA
SL	EF	EF	EF	EF			EF
TE	P	PU	P	P			P

Fonte: O autor

três para cada categoria e uma escolhida aleatoriamente com indicativo de cores e formas. Em seguida, resolveram as mesmas situações-problema sem indicativos de cores e formas.

Quadro 21 – Legenda: TM: Transformação de Medidas, COP: Comparação de Medidas, CP: Composição de medidas.

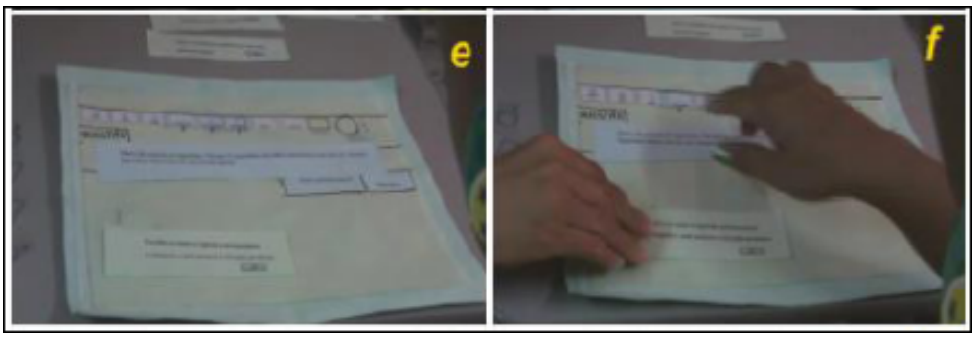
ID	Situação-Problema sobre Estruturas Aditivas	Tipo
AP1	Maria faz coleção de figurinhas. Ela tem 32 figurinhas, sua mãe a presenteou com mais 22. Quantas figurinhas Maria tem em sua coleção agora?	TM
AP2	Glaudenice tem R$ 14, 00 reais a amenos que Nádia. Nádia tem R$ 27,00 reais. Quantos reais Glaudenice tem?	COP
AP3	Jammes tem 17 CD's a menos que Gisele. Quantos CD's Gisele tem?	COP
AP4	Numa sala de aula tem 30 cadeiras, 5 estão quebradas. Quantas podem ser usadas pelos alunos?	CM
AP5	Rafael tinha dez refrigerantes e João tomou seis. Quantos refrigerantes restaram?	TM
AP6	Lucas tem 12 figurinhas de Pokémon e 25 de Digimon. Quantas figurinhas ele tem ao todo?	CM
AP7	Pedro colecionava selos. Hoje ganhou 23 selos ficando com 417 selos em sua coleção. Quantos selos ele tinha antes?	TM
AP8	Ingride tem R$ 12,00 reais a mais que ligiane, Se Ligiane possui R$ 27,00 reais, quantos reais Ingride tem?	COP
AP9	Ana ganhou em sua festa de aniversario 2 vestidos vermelhos e 5 vestidos amarelos, quantos vestidos Ana ganhou ao todo?	CM

Fonte: O autor

6.5 Procedimento

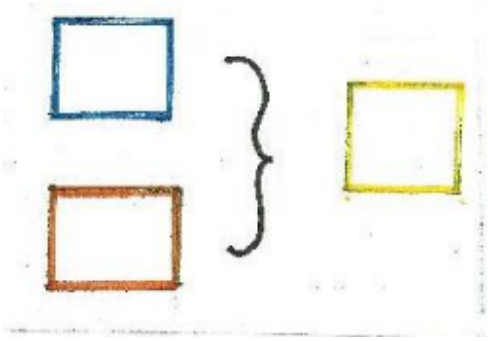
Utilizando um protótipo em papel da figura 66, os participantes realizaram ações sobre os elementos da interface, quais sejam: o texto, os quadrados, os círculos, setas e chaves para resolver as situações presentes no quadro 21. Em horário previamente agendado, os participantes foram visitados nas escolas, onde trabalhavam, sentaram-se diante do protótipo em papel e iniciaram as situações-problema do quadro 21. Neste cenário, estavam presentes o participante e o facilitador da interação, que assumindo o papel do computador gerava os estados decorrentes da interação, sem, no entanto, conduzir as ações na interface (BAILEY; AL., 2007; SNYDER, 2003). Nesse procedimento, os usuários resolveram as tarefas com e sem ajuda do computador.

Figura 66 – Protótipo em papel



Fonte: O autor

Figura 67 – Diagrama de Composição de medidas

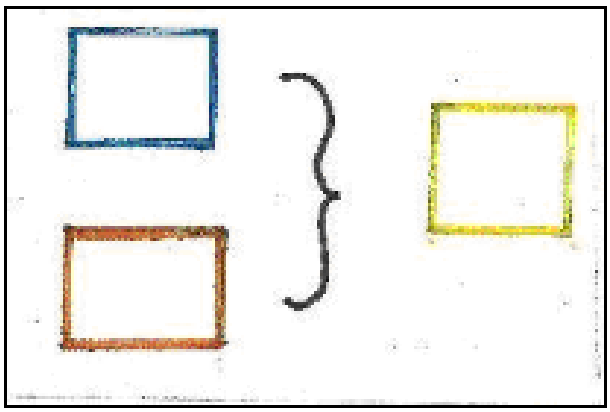


Fonte: O autor

6.6 Experimento

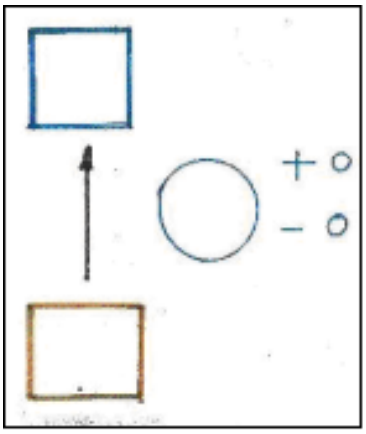
Durante a resolução da situação-problema AP6 do quadro 21 pertencente a categoria de Comparação de Medidas, o usuário vê o diagrama incompleto da figura 67, arrasta os elementos do texto usando o mouse e, em seguida, posiciona-os no diagrama. Durante esse processo, ele pode ver as formas e cores da usadas como indicativos para ações na interface. Conforme a figura 67, o diagrama correspondente à categoria de Composição de Medidas apresenta (quatro elementos): o quadrado azul, o quadrado laranja representam as "PARTES", o quadrado amarelo representa o "TODO" e a chave, representante da Composição de Medidas. As cores e formas da figura 68 foram usadas para distinguir na situação-problema, os objetos matemáticos. Por exemplo, se o número, representativo do "TODO" aparecer no texto marcado com um quadrado amarelo, estima-se que a igualdade de cores existente entre quadrado em cima do número e o quadrado no diagrama, indique a posição correta do número. O diagrama da figura 69 corresponde à categoria de Comparação de Medidas, o elemento base comparação ou referente aparece na cor azul, enquanto que o referido na cor laranja. O círculo, correspondente ao número relativo, aparece em cor azul e, ao lado, aparece um menu com duas opções: sinal positivo ou sinal negativo. Nas tarefas sem indicativo, não foi colocado nenhum indicativo em cima dos

Figura 68 – Exemplo do uso de cores para diferenciar os elementos do texto



Fonte: O autor

Figura 69 – Uso de cores para diferenciar o papel dos elementos no diagrama



Fonte: O autor

elementos, nem do texto, nem do diagrama. Para registrar os movimentos realizados na interface em papel, os usuários tiveram suas verbalizações gravadas e suas mãos filmadas. Além disso, para coletar os motivos conscientes de cada ação, ao final de cada tarefa foi realizada uma entrevista semi-estruturada (FLICK, 2004).

6.7 Resultados

Todas as vezes que uma ação era executada, por exemplo: escolher a categoria a qual pertence à situação-problema, ou quando a interface mostrava alguns feedback, uma ação era contabilizada. Após essa dinâmica, foi proposta uma unidade de análise da figura 70 composta por uma situação-problema, como presentes no quadro 21, pela manipulação dos números e diagramas exemplificados na Figura 23 e, segundo as modalidades de interação. Além disso, a unidade ainda apresenta a explicação do usuário sobre os motivos da ação. A figura 70 está subdividida em quatro partes: (A) conjunto limitado de ações realizadas pelo computador, ou seja, textos das situações-problema, mensagens pré-formatadas e

Figura 70 – Unidade de Análise

A
- Computador: Resolva essa questão
- Computador: Rafael tinha dez refrigerantes e João tomou seis. Quantos refrigerantes restaram?
- Computador: Escolha no menu a legenda corresponde a categoria a qual pertence a situação-problema.

B
- S(15-06-10): transformação (clicou em transformação)

C
- Entrevistador: Você escolheu transformação para esta situação-problema, como você explicaria isso?

D
- Professor (a) ; primeiro eu analisei o contexto do probleminha, e dentro daquela lógica que as medidas iriam sofrer mudanças, uma em relação a outra, ocorreu uma transformação, foi pelo contexto.

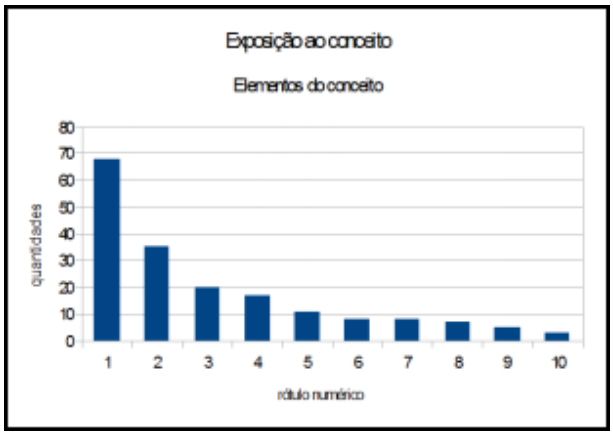
Fonte: O autor

feedback; (B) conjunto de ações realizadas pelo usuário, como presentes no quadro 8. (C) , onde aparecem as perguntas realizadas pelo pesquisador. Ao todo, foram 29 perguntas, que versaram sobre estratégia de resolução, motivos de escolha, significado de elementos (números e figuras) e conhecimentos antes e depois da vivência. (D) estão as respostas do usuário. Esse conjunto apresenta muitas possibilidades e sobre ele repousamos nosso olhar. Os vídeos e as gravações foram transcritos segundo o formato da figura 70 e totalizaram (09) nove protocolos verbais com (quinhentos e noventa) 590 unidades de análise e aproximadamente (64) sessenta e quatro segmentos em cada arquivo. Esses dados foram tratados qualitativamente no uso do software Qualrus (BRENT; SLUSARZ; THOMPSON, 2002a). Neste contexto, a mudança conceitual ocorre por meio da exposição dos usuários a vivência com a interface. Logo, faz-se necessário analisar quão exposto eles estiveram aos elementos da interface e, por conseguinte, aos conceitos que elas representam

6.7.0.1 Exposição aos conceitos

A figura 71 a seguir apresenta um gráfico de barras que indica quão exposto o usuário esteve durante a interação a cada elemento da representação. Como visto na figura 71, a maior parte do tempo, o participante esteve exposto a representações de número, em seguida, a quadrados sobre os números no texto, e assim, sucessivamente. Com essa visão, o projetista da interface ou o especialista no domínio pode perceber quão exposto ao conceito esteve o participante e, dessa forma, estimar como melhor explicitar cada elemento constitutivo da representação para favorecer, por conseguinte, a significação de cada elemento especificamente como visto no quadro 22 .

Figura 71 – Legenda, elementos da representação 1- Número; 2- Quadrado sobre elemento do texto; 3- Círculo sobre elemento do texto; 4- Interrogação; 5- Categoria de Composição; 6- Seta vertical; 7- Chave; 8- Escolha da categoria de Transformação;9- Escolha da categoria de Comparação; 10-Seta Vertical



Fonte: O autor

6.7.1 Significados

A figura 71 evidencia que, durante a interação, os usuários estiveram mais expostos ao conceito de número; entretanto, cabe observar melhor os papéis assumidos por cada representação. No quadro 22, por dezenove (19) vezes, um número qualquer significou número relativo; por treze (13) vezes o estado inicial de uma transformação (13); e assim sucessivamente. Esses resultados indicam que a construção do diagrama colocou o usuário diante de situações nas quais pode perceber potenciais relações entre números e elementos constitutivos do diagrama correspondente à categoria escolhida. Dessa forma, foram percebidos significados diferentes para um mesmo elemento. Tais relacionamentos são mostrados, a seguir, no quadro 23, onde, a linha (01), QN significa quadrado em cima do número. Q significa quadrado no diagrama. Das (09) nove ocorrências um quadrado em cima do número foi posicionado num quadrado no diagrama, em três (03), significou a base da comparação. Essa visão favorece que projetistas de interface analisem tal crença buscando melhor evidenciar os relacionamentos existentes entre os elementos do texto e diagrama.

6.7.1.1 Diagrama vazio

No quadro 23 foram identificados os significados atribuídos aos relacionamentos entre os números no texto e os elementos constitutivos da representação; entretanto, durante a resolução de uma situação-problema, especificamente após a escolha correta da categoria, aparece na interface um diagrama vazio correspondente a categoria escolhida. Cabe, portanto, saber dos participantes quais os significados atribuídos ao diagrama vazio. Os resultados aparecem, a seguir, no quadro 24, onde, por (09) nove vezes, o diagrama

Quadro 22 – Significado de cada elemento no processo

Elemento	Significado
Número	Número relativo(19); Estado inicial da transformação(13); Referente(10); Ambiguidade(10); Uma parte da composição(9); Referido. (9); Estado final da transformação.(7); Resultado final, objetivo, resultante de uma operação(7); O todo da composição(4); Referencial, ponto de partida(2); Resultado de uma questão anterior(1); Busca de alternativas correta(1); Parte do problema, querendo dizer que o diagrama é formado por partes independente da categoria.(1) ;
Quadrado sobre elemento do texto	Posição adequada de um número ou do resultado(9), Uma parte do problema. Localização adequada de elemento. (Novos significados a partir da adoção dos indicadores)(7); Referido(6), base da comparação(6), Referente(1)
Círculo sobre elemento do texto	Número relativo, ganhar ou perder, depende do sinal, elemento transformador, local do elemento transformador(12); Localização adequada, dica, referencial(7), Parte do problema, querendo dizer que o diagrama é formado por partes independente da categoria. (1),
Interrogação	Item desconhecido, resultado esperado na situação-problema através da construção do diagrama (12), Posição do resultado a alcançar(4),direção(1)
Categoria de Composição	As partes formam o todo(8),Entender o problema, nas suas partes e no geral(1), dúvida sobre se é composição ou transformação(1), subtração resultante de uma organização prévia(1), operação de soma para obter total(1)
Seta vertical	hipótese sobre ponto de partida, direção, de baixo para cima, paralelismo, referido, referente, subir para encontrar. comparação(comentário de uma professora: - o indicativo que eu vou fazer a comparação, tá na vertical, eu vou ter uma base, uma embaixo e outra em cima, eu entendi dessa forma, o sentido dela), modo de organizar a conta(1)
Chave	Diagrama de composição, símbolo que representa a categoria.(5) A junção dos elementos, colocar todos em um só lugar. (3)
Escolha da categoria de Transformação	Sair de uma situação e chegar em outra, mudança(4), explicação muito abstrata(2), junção das partes para posterior transformação(1)
Escolha da categoria de Comparação	Confrontar, mesma pessoa e dois números sendo comparados(1), mesmos elementos(cadeiras)(1). Presença do número relativo e pessoas diferentes(3)
Seta horizontal	Indicativo, mudança

Fonte: O autor

vazio foi identificado como hipótese sobre o ponto de partida, por oito (08) identificado como símbolo, categoria, incógnita. Isso significa que na presença do diagrama vazio o participante verbalizou termos abstratos. Como pode ser visto na figura 72 durante a visão do diagrama vazio foram construidas hipóteses sobre o ponto de chegada. Ou seja, houve a estimativa do caminho a ser seguido. Após a resolução da situação-problema, o diagrama estará preenchido, sendo assim, acompanhemos, a seguir, os significados atribuídos ao diagrama preenchido.

6.7.1.2 Diagrama preenchido

Como foi visto no quadro 24, após a conclusão de cada situação-problema, foi externado que, independentemente, da categoria, seja de Composição, Comparação, ou Transformação, que a visão do diagrama vazio, favorecia tanto a construição de hipóteses sobre o ponto de chegada quanto sobre o ponto de partida. Ou seja, não apenas sobre o caminho a ser percorrido, mas também sobre uma possível solução. A seguir, no quadro 25

Quadro 23 – Legenda: C: Comparação; T: Transformação; C: Composição; QN:Quadrado em cima do número;CN:Circulo em cima do número;QCN:Quadrado colorido em cima do número;QCN:Quadrado colorido em cima de interrogação;QI:Quadrado em cima do interrogação;I:Interrogação;T:Texto;Q:Quadrado;C:Círculo;QCD:Quadrado de mesma cor no diagrama;N:Números;D:Diagrama

No texto	No diagrama	Conceitos	Outros
QN	Q	Composição de medidas (1);Transformação de medidas(1); Organizadores da informação	base de comparação(3), indicação(2); referência(2), localização(2); repetição da pergunta (2), fácil(2), sequencia(2), quantificador universal para as ações (1); transcendendo ao contexto da ação(1), percurso(1), variar(1, foi dito na transformação) ,erro(1);escolha(1); posição, percebeu forma(1);
CN	C	Comparação (1)	Referência(3), localização (2), indicação(2) ;Circulo, diferença, quadrado, explicação ambígua (1);Fácil, transcendendo ao contexto da ação , percurso, sequencia, organizadores da informação, variar(1); Circulo, posição, percebeu forma(1)
QCN	QCD		não percebeu cor(1), percebeu cor(1); justificativa, organizadores da informação, pronome pessoal referendo, referido; diagrama, posição, percebeu cor percebeu forma,(1)
QCI	QCD		Interrogação, quadrado, diagrama, cores, percebeu cor , resultado final, objetivo, referência(1) ;resultado final, referendo (1)
QI	Q	Composição de medidas	repetição da pergunta, organizadores da informação predicado ternário , item desconhecido
N	N	Número e sua relação com os conjuntos	representação textual, diagrama, interpretação, objetivo, fácil, comparação entre representações, organizadores da informação
I	Q		Objetivo , hipótese sobre ponto de chegada
T	D	Inversão	Interpretação , orientação, indicação, fácil

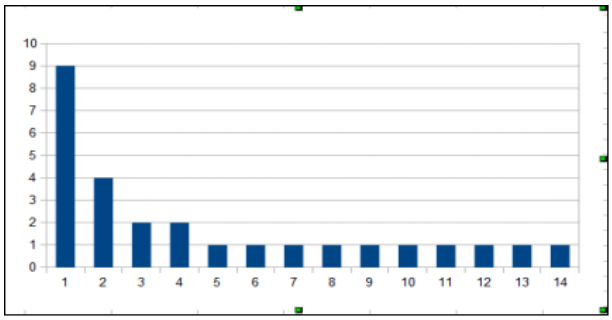
Fonte: O autor

Quadro 24 – Impressões sobre diagrama vazio

Significados
Hipótese sobre ponto de chegada (9), categoria (7), item desconhecido (4), hipótese sobre ponto de partida (2), orientação(2), diagrama, símbolo, Incógnita, código, comunicação, dica, objetivo, interpretação ,resultado, objetivo , etapa, claro , verificação, visão, decompor , percurso, identificar. Código interpretação, objetivo, fácil, comparação entre representações, Representação, textual, diagrama (1) , Dúvida, localização, usuário pergunta a si mesmo , busca de pistas no texto (1).

Fonte: O autor

Figura 72 – Legenda: hipótese sobre ponto de chegada(9), 2 - hipótese sobre ponto de partida(2), 3 - item desconhecido(4), 4 - orientação(2), 5- dica, 6- objetivo, 7- interpretação ,8 - resultado, 9- objetivo , 10 - etapa, 11 - claro , 12 - verificação, 13 - visão, 14 - decompor , 15 -percurso, 16- identificar.



aparecem os significados atribuídos para o diagrama totalmente preenchido. Nessa visão, interessa-nos verificar se a percepção das relações qualitativas, potencialmente existentes entre os elementos do texto foi decorrente da construção do diagrama.

Quadro 25 – Impressões sobre Diagrama Preenchido

Significados
Sucesso (10), etapas resolvidas (4), Processo, organização (3), fácil, desafiar a si mesmo, Diagrama(2), Curiosidade , hipótese sobre ponto de chegada, símbolo, situação-problema (1), Representação da categoria(1); Etapa, resultado, sucesso, desafiar a si mesmo, hipótese sobre ponto de chegada, Posição, meio, organizadores da informação , hipótese sobre ponto de chegada, Diagrama

Fonte: O autor

Como pode ser visto no quadro 25 , por (10) dez vezes, os usuários identificaram o diagrama preenchido como **sucesso, etapa resolvida, organização do pensamento, desafio a si mesmo**. Isso sugere que construir o diagrama, além de favorecer a explicitação de alguns elementos do conceito ainda, fez emergir termos independentes de contexto.

6.7.1.3 Principais ideias matemáticas

Ao final das situações-problema do quadro 21, foram respondidas três perguntas relativas às impressões gerais, dificuldades e surpresas. Como pode ser visto no quadro 26, houve dois tipos de observação: a linha mais escura mostra as palavras que predominaram no discurso do participante com mais baixa escolaridade e que percebeu as formas e cores. Já a linha mais clara, aparecem as palavras dos demais, que não perceberam as formas e cores. No primeiro caso, linha escura, além da percepção das cores e formas, houve a verbalização de conceitos, já no segundo caso, linha clara, não houve verbalização de conceitos. Houve, no entanto, verbalizações de elementos que indicam independência do contexto. Por exemplo, os termos: **organização**, **lógica**, **interpretação** e **compreensão**.

Quadro 26 – Iniciais ideias matemáticas

Elementos na explicação	
Conceitos	Outros
Comparação, transformação, conceito de composição de medidas , organizadores da informação ,comparação, composição	Diagrama, cores, forma, transcendendo ao contexto da ação, aprender
	Organização, lógica, caminho, interpretação, contexto, compreensão

Fonte: O autor

Em outras palavras, no discurso dos participantes de mais alta escolaridade, predominaram termos abstratos.

No quadro 27 aparecem as impressões gerais dos participantes sobre a interface, bem como possíveis decepções e surpresas. Onde, a maioria dos participantes disse não ter decepção no uso do software. As surpresas, no entanto, repousaram nas possibilidades interpretativas favorecidas pela construção do diagrama. Ou seja, eles apontaram que construir o diagrama oferece visão sobre o processo de resolução. Além disso, quando perguntados sobre como superar suas dificuldades, pontuaram a importância do esforço pessoal e da transformação do si mesmo por meio do estudo. Além dessas observações, foi perguntado sobre as impressões registradas durante o primeiro contato com a interface. Como mostrado no quadro 28, a interface, inicialmente, não foi bem compreendida pelos usuários. Suas dúvidas só foram dirimidas, portanto, durante o experimento.

Quadro 27 – Impressões gerais sobre o uso do software

Decepção	Surpresa	Para superar as dificuldades
Nenhuma, satisfação, curiosidade, medo de errar	Curiosidade, percurso compreensão, indicação, transcendendo ao contexto da ação.	Ler, diagrama, calma, entender, contexto, referência antiga
Bugs do computador, mensagens inconsistentes.	Contagem, visão, movimentos, pensamento	Estudando, processo, transformação de si mesmo

Fonte: O autor

Quadro 28 – Impressões sobre o primeiro contato com o software

'As professoras responderam muito pouco sobre as primeiras impressões, os predicados ternários envolviam apenas, pronomes pessoais e elementos como: curiosidade, falta de compreensão, falta de entendimento. Não houve relacionamentos entre o que estava sendo apresentado e experiências anteriores. Isso só aconteceu durante a interação.

Fonte: O autor

6.7.2 A Conceitualização ou Mudança conceitual

Após observar os significados atribuídos a cada estado intermediário da construção do diagrama, observemos, a seguir, no quadro 29, os termos predominantes no estado anterior à vivência: "antes" e no estado posterior à vivência: "depois". Como pode ser

Quadro 29 – Legenda: COMP: Composição; C: Comparação; T: Transformação

Categoria	Antes	Depois
T	Explicação ambígua (2), Elementos, mudança(3), Nada(3), Transformação, elementos, situação (1)	Relação entre parte do diagrama e o texto (1), conceito de número e sua relação com os conjuntos, variação das situações-problema (5), Percurso, hipótese sobre ponto de chegada , mudança(1)
C	Agilizar, ausência de confronto, (1), Valores, comparação (1), nada(5)	Base de comparação, organização dos elementos, sinal relativo (1), todo, transferindo, a outra quantidade de outra pessoa (1), variar(2)
COMP	Outra,ótica,organização(1), nada(5), união,agregação,elementos(2), Compor,problema,resultado(1),	parte, formar, todo(1), variação das situação-problema (1), informação, organização, orientação(1), Relacionamento, parte do diagrama, elementos do problema , decompor, composição, total (3)
Todas	Nada(13)	Variação de situações-problema (8)

Fonte: O autor

visto na linha (01) um do quadro 29, para a categoria de Transformação de Medidas, por 03(três) vezes, predominou, antes da vivência, não só as expressões: "nada" e "mudança", mas também explicações ambíguas, que não ofereceram subsídios para interpretações adequadas; já depois da vivência houve, predominantemente, a percepção de que o local do item desconhecido pode variar. Além disso, ocorreram termos abstratos, independentes do contexto, por exemplo: organização, orientação, percurso.

6.8 Discussão

Os modelos quantitativos usam parâmetros que não são encontrados no mundo real e, por esse motivo, eles não capturam o conhecimento estrutural do domínio(BREDEWEG et al., 2006). Já os modelos qualitativos são ferramentas usadas para descrever um sistema de maneira estrutural. Tais modelos imitam os objetos reais, bem como suas conexões estruturais descrevendo seus elementos de maneira mais próxima do real. Nesse sentido, a representação de Gérard (1998) possibilita perceber que, neste contexto, as operações numéricas são decorrente de relações qualitativas, potencialmente existentes, entre os objetos do domínio. Ibid. propõe, portanto, a construção de diagramas que representam qualitativamente as relações matemáticas implicadas nas situações-problema e, por conseguinte, irá favorecer dois tipos de modelagem: uma qualitativa, realizada à medida que o usuário constrói e reconstrói os diagramas; e uma quantitativa, quando ele encontra o número natural ou relativo correspondente ao item desconhecido.

6.8.1 Habilidades metacognitivas e consciência meta conceitual

A vivência com a construção dos diagramas mudou o discurso dos participantes, notadamente, com a inserção de termos abstratos como: organização, lógica, caminho, interpretação, contexto, compreensão. Ou seja, não houve, portanto, modificação do status do conceito e sim do processo reflexivo frente a tarefa. Além disso, apareceram termos relacionados à motivação. Mesmo aquele usuário que apresentou a maior discrepância do grupo, quando perguntado sobre como superar suas dificuldades, ele disse as seguintes palavras:

Entrevistador - como superar essas dificuldades?

Entrevistado - "*estudando e passando mais adiante, porque se eu cheguei aqui foi porque, eu tive que estudar, tive de passar por um processo, tudo há um processo, então eu primeiramente vi lá no curso e de lá vim pra cá, e ao ver transformar isso ai, é sinal que algum rendimento eu tive.*"

Os resultados aqui obtidos se coadunam com os citados por Merenluoto e Lehtinen (2004), Vosniadou e Verschaffel (2004), quanto à mudança conceitual favorecer o desenvolvimento de habilidades metacognitivas[1]. Além disso, predominaram termos relacionados a aspectos motivacionais e a consciência meta conceitual, que se refere ao pensamento do aprendiz sobre a relação entre seus conhecimentos prévios e as reais exigências da tarefa MERENLUOTO; LEHTINEN, op. cit.. Por exemplo, esses professores do Ensino Fundamental estão acostumados a resolver situações-problema em sala de aula. Entretanto, como visto no quadro 46, quando perguntados sobre seu conhecimento antes da vivência, (03) três participantes disseram não saber **nada**. Depois da vivência, no entanto, perceberam, não só que as situações-problema podem variar, mas também que existem distinções entre o modo de resolução, aquele, meramente algébrico e sem confronto e, este, construindo-se um diagrama e recebendo *feedbacks* de erro. Ou seja, em sala de aula, durante a resolução das situações-problema, alguns passos da tarefa são suprimidos e, por conseguinte, não são percebidos.

6.8.2 Elementos da representação visual e o desenvolvimento a um apropriado modelo conceitual.

Neste contexto, os elementos constitutivos da representação foram manipulados segundo o quadro 30, que mostra os elementos constitutivos do diagrama, bem como as modalidades de interação sobre esses; entretanto, cabe observar aqueles elementos que, sob manipulação, favoreceram a emergência de discursos contendo termos abstratos, tais como: **organização, interpretação e direcionamento**. O quadro 31, portanto, é resultante

[1] A habilidade metacognitiva está relacionada a um controle maior sobre aquilo que aprendemos cognitivamente. Ou seja, a metacognição também passa por um processo de aprendizagem. Podemos dizer que ela seria o processo de adquirir uma consciência sobre aquilo que se aprende inconscientemente.

do quadro 30 ordenado pelo percentual de termos abstratos que emergiram quando cada elemento constitutivo da representação foi manipulado.

Quadro 30 – Nas linhas, estão a representação do conceito, na coluna estão as tarefas de mouse: A:Anotação temporária em cima dos números; P:Posicionar;T: Texto; S:Selecionar;O: Orientação; C:Caminho;Q: Quantificar; M:Menu com duas opções. As células preenchidas indicam que o elemento foi manipulado pelo U: manipulado diretamente pelo usuário - professor ou pelo C: manipulado pelo computador, ou pelos dois. As células vazias, no entanto, denotam ausência de manipulação.

Elemento	P	A	T	M	S	C	O	Q
Chave	C				U			
Quadrado	U,C	C			U	U		
Círculo	U,C	C			U	U		
Seta Vertical	C				U			
Seta horizontal	C				U			
Número	U		U		U	U		
Sinal		C		U				

Fonte: O autor

Nas linhas (01) um, (02), dois e (03) três do quadro 31, o usuário manipulou as setas e a chave por meio do protocolo de mouse selecionar. Nessas situações, em 100% dos casos, houve verbalização de termos abstratos. Já na linhas (10) dez, embora os números tenha sido, individualmente manipulados, por meio de quatro protocolos de mouse fizeram emergir termos abstratos em apenas (5%) dessas ocasiões,. Disso se conclui que, embora houvesse apenas uma maneira de manipular a **chave** e as **setas**, vertical e horizontal, nessas ocasiões, emergiram mais termos abstratos do que nas ocasiões em que números foram manipulados. Ou seja, os elementos representativos das relações apresentaram maior potencial para fazer emergir termos abstratos. Neste estudo, não foi encontrado nenhuma pesquisa anterior relacionando termos abstratos com elementos constitutivos e manipuláveis de representações.

6.9 Conclusão

A modelagem matemática é uma atividade iterativa que ocorre por meio de vários ciclos e, nesse trajeto, são feitas anotações pessoais e ou consensuais, são feitos desenhos, utilizados gráficos, figuras, caracteres, equações, e toda uma sorte de símbolos, utilizados para deixar marcas em pontos significativos do caminho, as quais reflitam decisões tomadas: pensamentos; ideias e conclusões. Ou seja, um conjunto de informações contextuais decorrentes do curso da tarefa no qual estiveram presentes elementos do mundo material em interação com a dimensão cognitiva. Por esse motivo, buscou-se, neste estudo, recuperar

Quadro 31 – Legenda:nas linhas, estão os elementos constitutivos da representação, na coluna, as tarefas de mouse: A:Anotação temporária em cima dos números; P:Posicionar;T: Texto; S:Selecionar;O: Orientação; C:Caminho;Q: Quantificar; M:Menu com duas opções; As células preenchidas indicam que houve manipulação do elemento segundo a tarefa disposta na coluna. As células vazias, no entanto, denotam ausência de manipulação do elemento, tanto pelo U: manipulado diretamente pelo usuário quanto pelo C: manipulado pelo computador.

%		P	A	T	M	S	C	O	Q
100,00%	Categorias de comparação					U			
100,00%	Categorias de transformação					U			
100,00%	Seta horizontal	C				U			
88,00%	Chave	C				U			
81,00%	Categorias de composição					U			
70,00%	Círculo sobre o texto	U,C	C			U	U		
62,00%	Seta Vertical	C				U			
48,00%	Quadrado sobre o texto	U,C	C			U	U		
29,00%	Interrogação					U			
5,00%	Número	U		U		U	U		
	Sinal		C		U				

Fonte: O autor

o contexto da tarefa para oferecer informações sobre a interferência desse contexto na mente dos aprendizes. Para tanto, fez-se necessário identificar os elementos externos – Elementos da interface e modalidades de interação que, abrigando relações com os conceitos, fossem potenciais influenciadores de uma mudança conceitual e, além disso, fornecessem pistas de como ocorreu tal mudança. Nesta observação, por exemplo, a mudança conceitual foi influenciada pela representação de conceitos, pelos seus elementos constitutivos, bem como pelas modalidades de interação oferecidas. Contudo, na comparação do antes com o depois, a maior variação se deu na ocorrência de termos abstratos. Construir o diagrama proporcionou, portanto, a emergência de termos meta-cognitivos, bem como de uma consciência meta conceitual.

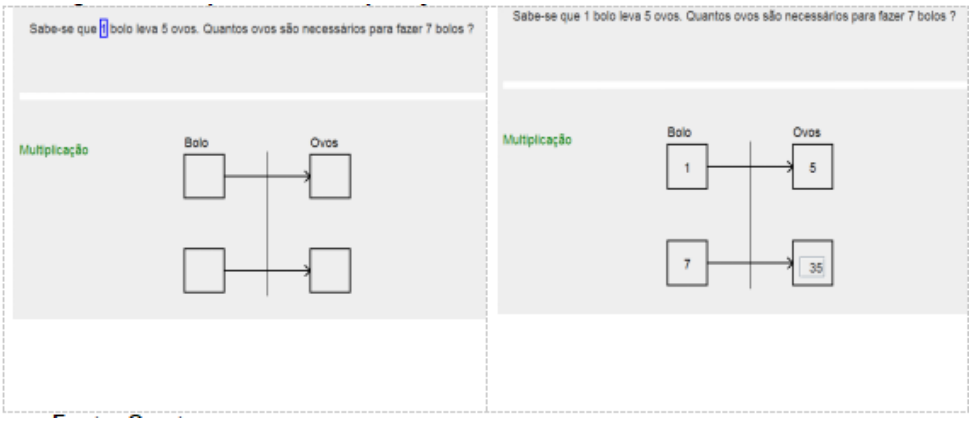
7 Multiplicação, divisão por partes ou divisão por cotas: Como a construção de diagramas influencia na significação sobre Estruturas Multiplicativas

7.1 Multiplicação

Um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos? Nesse contexto, desconhece-se o valor total e conhece-se o número de partes e o valor de cada parte. Nesse caso, o valor total é encontrado multiplicando-se o número de partes pelo valor de cada parte. Para resolver essa situação-problema é mais comum o uso da expressão aritmética 7 x 5 = 35; Nesse formato de representação, existem dois operandos: o número 7 e o número 5, dois operadores: o "X" e o "=" , bem como o número (35) trinta e cinco, resultante da operação de multiplicação. Embora, nesse formato, apareçam apenas (03) três números, representantes de cardinais de conjuntos Vergnaud (1983), Gérard (1998) advogam que existem quatro; esses, já citados, e mais um: o número (01) um. Por esse motivo, o mesmo autor propõe que o processo de resolução ocorra por meio da construção de um diagrama, que apresente uma divisão espacial, denotada pelo segmento de reta vertical, como visto, a seguir, na figura 73.

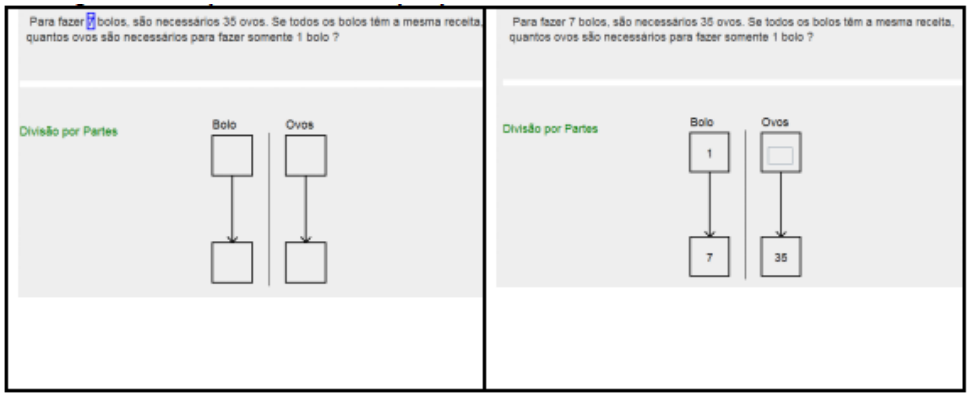
Em cima esquerdo da figura 73 aparece o texto de uma situação-problema do tipo multiplicação, embaixo desse, aparece um diagrama vazio representativo da categoria. Do

Figura 73 – Esquema de Multiplicação



Fonte: (MOURA, 2010)

Figura 74 – Esquema de divisão por cotas



Fonte: (MOURA, 2010)

lado direito, embaixo do texto aparece um diagrama preenchido representativo da situação-problema. Em cada diagrama, tanto no vazio quanto no preenchido, aparece uma divisão, denotada por um segmento de reta, para mostrar que elementos de natureza diferentes, bolos e ovos, por exemplo, devem ser posicionados em espaços diferentes. As setas horizontais, no entanto, denotam a relação existente entre bolos e ovos: um (01) bolo leva (05) cinco ovos. Já os quadrados representam as quantidades dos elementos. A expressão aritmética resultante será, por conseguinte, decorrente desse raciocínio qualitativo.

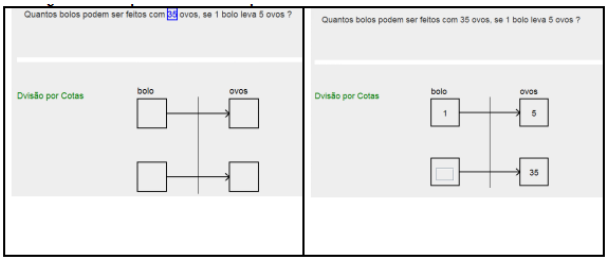
7.1.1 Divisão por partes

Para fazer sete bolos, são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos têm a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo? Desconhece-se o valor de cada parte e conhece-se o valor total e o número de partes. Nesse caso, o valor de cada parte é encontrado, dividindo-se o valor total pelo número de partes. Assim como na figura 73, a figura 74 apresenta um segmento de reta para dividir o espaço, bem como setas verticais direcionadas para baixo, usadas para mostrar a relação existente entre elementos de mesmo domínio, ou seja, bolos se relacionam com bolos e ovos com ovos. Com esse raciocínio qualitativo, obtém-se a expressão $35/7 = 5$ cujo resultado é o número (05) cinco.

7.1.2 Divisão por cotas

Quantos bolos podem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos? Desconhece-se o número de cotas e conhece-se o valor total e o valor de cada cota. Nesse caso, o número de partes é encontrado, dividindo-se o valor total pelo valor da cada cota. Na figura 75, a situação-problema apresenta o valor ou cota correspondente à unidade (01) um bolo leva (05) cinco ovos. Ou seja, cinco ovos é a cota que cabe a cada bolo, deseja-se, então, saber o número de partes. Segundo Vergnaud (1983), Vergnaud (1988) nas situações-problema do campo multiplicativo estão presentes os conceitos de

Figura 75 – Esquema de divisão por cotas



Fonte: (MOURA, 2010)

Função não linear, Relação, Espaço vetorial, Taxa, Análise dimensional, Número racional, Fração, Multiplicação, Razão e Divisão. Entretanto, o Ensino Fundamental, predomina situações do tipo: multiplicação, divisão por cotas e divisão por partes. A conceitualização das Estruturas Aditivas, bem como das Estruturas Multiplicativas, ocorre na vivência com diversas (a) situações-problema, que favorece a percepção dos (b) invariantes operatórios sobre as ações e sobre os conceitos e é mediada pela (c) representação metafórica de tais conceitos. (a) As situações-problema são textos com estórias, dentro das quais estão os problemas matemáticos, que, em função de conter elementos presentes no cotidiano do aprendiz, tais como: carrinhos, bolinhas e bonecas, estima-se que favoreça a significação dos conceitos nelas enraizados. (b) Já os invariantes operatórios são proposições sobre o domínio matemático representado textualmente na situação-problema. A figura 76, a seguir, apresenta uma história de uso e explicita os erros cometidos durante a tarefa. seguinte exemplo:

V = B*H. Segundo Ibid., existem (04) quatro maneiras que os estudantes podem ler essa fórmula:

- como um caminho para calcular V quando B e H são conhecidos;
- como um caminho para calcular B(ou H) quando é conhecido o valor de V e H(ou B);
- com o um relacionamento sobre três variáveis - V é proporcional a B quando H é constante e à H quando B é constante;
- como uma restrição para escolher unidades coerentes.

À luz destas discussões anteriores, fazemos a seguinte questão: Quais elementos presentes nas 73, figura 74 e figura 75 mais facilitaram o desenvolvimento de um apropriado modelo conceitual sobre estruturas multiplicativas?

7.2 Objetivo

Observar a potencial influência que cada elemento presente no diagrama exerceu na mudança conceitual sobre estruturas multiplicativas.

7.3 Método

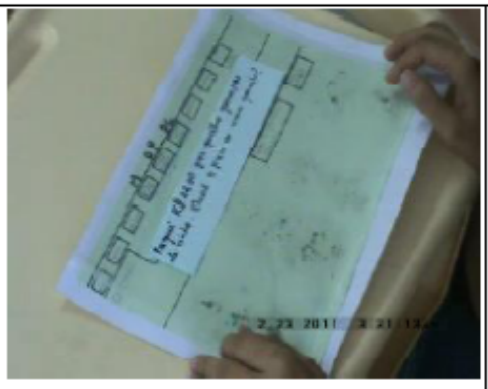
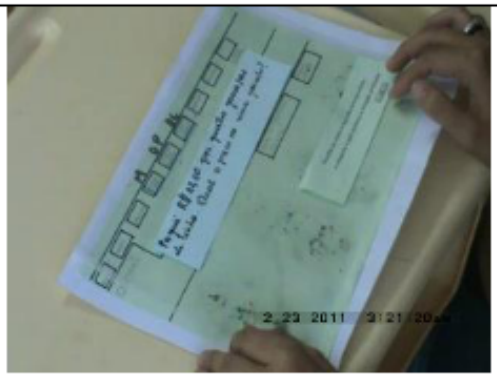
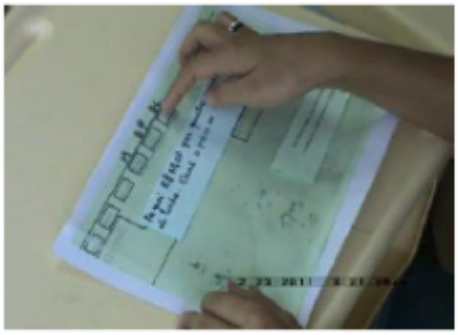
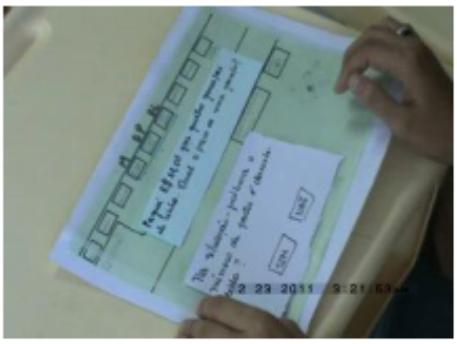
Para ampliar a habilidade dos aprendizes no trato com situações-problema é necessário, portanto, oferecer situações que favoreçam mais possibilidades interpretativas(VERGNAUD, 1986; GÉRARD, 1998). Ou seja, construir os diagramas das figura 73, figura 74 e figura 75 possibilita um mecanismo de ação que oferece mais possibilidades interpretativas sobre as situações-problema. Nesse contexto, a ação pode ser entendida como um tipo de discurso, por meio do qual o usuário expressa seus conhecimentos. Ele interage com a interface, faz, desfaz e refaz ações e, dessa maneira, tem acesso a configurações anteriores, estados anteriores de seu raciocínio, de sua construção. Enfim, do seu próprio discurso como visto na figura 76.

Nesse cenário, estima-se que ações executadas na interface das 73, figura 74 e figura 75, favoreçam que professores do Ensino Fundamental desenvolvam habilidades para resolver situação-problema do campo multiplicativo. Em Vergnaud (1988, pg-159), tradução nossa, aparece o Utilizando um protótipo em papel propostos por Bailey e al. (2007), Snyder (2003), os usuários resolveram as situações presentes no quadro 33 realizando as ações sobre os elementos da interface, quais sejam: os botões, representativos das categorias, o texto, os quadrados. No cenário da figura 76 estão presentes um participante e um facilitador da interação, que assume o papel do computador gerando os estados da interface. figura 77 , a seguir, mostra um exemplo da interação, enquanto o participante realiza ações na interface o facilitador simula o comportamento do computador.

7.4 Participantes

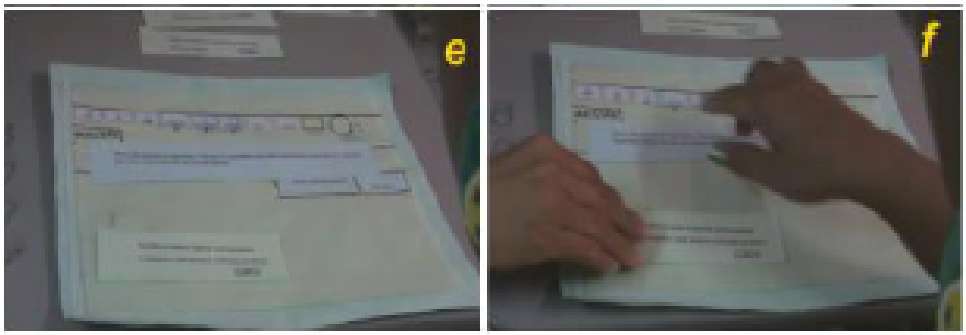
Dentre (25) vinte e cinco participantes do projeto de extensão intitulado: Formação de professores, estruturas aditivas, multiplicativas e análise qualitativa, aprovado com apoio do programa PIBIN da UNIVASF- Universidade Federal do Vale do São Francisco em parceria com a prefeitura de Juazeiro-BA, todos os participantes foram convidados; entretanto, desses (25) apenas (07) sete, presentes no quadro 32 participaram do experimento. Os participantes do quadro 32 resolveram as situações presentes no quadro 33.

Figura 76 – História de uso, ações do usuário e da interface

 A interface mostra uma situação-problema	 A interface mostra uma mensagem de questionamento para o usuário: pedindo que ele indique qual o tipo de problema
 O usuário "clica" no botão correspondente a legenda de Divisão por Cotas, Ocorre o primeiro erro, que diz respeito à categorização do problema.	 Diante do erro cometido pelo usuário, a interface exibe a seguinte mensagem: "Na situação problema o número de partes é desconhecida?
	O usuário insere o número selecionado no texto usando um pincel.

Fonte: O autor

Figura 77 – Protótipo em papel



Fonte: O Autor

Quadro 32 – Legenda: PG: Pós-Graduação, MA: Matemática, EF: Ensino Fundamental, PU: Pública, P: Particular.

Professor	01	02	03	04	05	06	07
Sexo	M	F	M	F			F
Idade	45	30	48	30			35
Esc	PG	2°	PG	PG			PG
For	MA	MG	MA	MA			MA
SL	EF	EF	EF	EF			EF
TE	P	PU	P	P			P

Fonte: Do Autor

Quadro 33 – DC: divisão por cotas, M: multiplicação, DP: Divisão por partes.

ID	Situação-Problema sobre Estruturas Multiplicativas	Tipo
P1	Tenho R$ 12,00 reais e quero comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?	DC
P2	Um bolo leva cinco ovos. Quantos ovos são necessários para fazer sete bolos?	M
P3	Quantos bolos poem ser feitos com trinta e cinco ovos, se cada bolo leva cinco ovos?	DC
P4	Paguei R$ 12,00 reais por quatro garrafas de vinho. Qual o preço de uma garrafa?	DP
P5	Para fazer sete bolos são necessários trinta e cinco ovos. Se todos os bolos tema a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo?	DP
P6	Uma garrafa de vinho custa R$ 3,00 reais, quanto custa quatro garrafas?	M

Fonte: Do Autor

Figura 78 – No inicio da interação com diagrama incompleto

Fonte: O autor

7.5 Procedimento

Em horário previamente agendado, os participantes foram visitados nas escolas, onde trabalhavam. Eles sentaram diante do protótipo em papel e iniciaram a resolução das situações-problema. Neste procedimento, os usuários estiveram expostos a resolução das tarefas com ajuda e sem ajuda do computador.

7.6 Experimento

Como pode ser visto na figura 78, aparece na interface a situação-problema e embaixo desta, um diagrama incompleto. Após ler a situação-problema, o usuário inicia o posicionamento dos elementos no diagrama. Após a escolha da categoria correta, a interface mostra um diagrama incompleto, que apresenta, além de um segmento de reta, dois rótulo usados para indicar a distinção entre os elementos. Por exemplo, a posição dos valores na figura 78 é indicada por rótulos com o nome dos elementos recortados em pedaços de papel. Por exemplo: **ovos** e **dinheiro**. Além desses, que, assim como os rótulos, serviram para indicar a posição correta dos elementos. Neste procedimento, os usuários tiveram suas verbalizações gravadas e suas mãos foram filmadas para registrar os movimentos realizados na interface em papel. Ao final de cada tarefa foi realizada uma entrevista semi-estruturada focal Flick (2004) cujo propósito foi registrar os motivos conscientes para as ações. Tais motivos podem mostrar os elementos que estiveram presentes na tomada de decisão, bem como o ponto de partida de cada decisão.

7.7 Resultados

Quando um usuário escolhia a categoria à qual pertence a situação-problema, ou quando a interface mostrava algum *feedback*, uma ação era contabilizada. Os vídeos e gravações, resultantes da interação, foram transcritos e totalizaram (07) sete protocolos verbais com (trezentos e trinta e cinco) 335 unidades de análise e, aproximadamente (64) sessenta e quatro segmentos em cada arquivo. Esses dados foram tratados qualitativamente no uso do software Qualrus(BRENT; SLUSARZ; THOMPSON, 2002a). A seguir, os significados atribuídos aos elementos, presentes na interface, bem como aos seus relacionamentos.

7.7.1 Significados dos elementos.

Como pode ser visto no quadro 34, quando os usuários manipularam o número marcado com um quadrado, do total de (75) setenta e cinco ações, houve a verbalização da palavra correspondência por quinze (15) vezes, bem como das palavras proporcionalidade e equivalência. Isso indica que a visão do diagrama influencia na percepção dos usuários, notadamente, no que tange a existir proporcionalidade e correspondência entre os elementos na situação. A seguir o quadro 35 mostra o significado atribuído ao rótulo. O rótulo,

Quadro 34 – Elementos na visualização de um número marcado com um quadrado

Número marcado com um quadrado	Correspondência(15), proporcionalidade(11), diagrama(9), equivalência(8), sem atenção(6), elemento ausente (5), localização(4), Posição específica(4), Estado anterior(3), elemento principal(3), próximo estado(3), quadrado superior, seqüência(3), elemento presente(2), relação(2), confuso(2), Quantidade(46), item desconhecido(13), valor unitário(10), resultado (8), total (7), dinheiro(3) , parte(3), descobrir(2), explicação ambígua(2) , indicação(6), referência(6), ponto de partida(9), Operação (4), dividir(3), cálculo mental(3) , divisão por cotas (3), multiplicação, divisão por partes, hipótese sobre ponto de chegada(4), hipótese sobre ponto de partida(3), hipótese sobre o próximo estado.

Fonte: Do Autor

Quadro 35 – Elementos presentes na visualização do quadrado em cima do texto

Rótulo	Localização(4), Posição específica (4), quantidade(2), situação-problema(2), elemento(2), elementos distintos(2), valor , identificar(2), indicação(2) , informação , distribuição, resolução, ajuda , muito bom , fundamental , correção ,fácil(3), Anotação de elemento feita pelo computador, sequencia(2)

Fonte: Do Autor

elemento manipulado pelo computador, foi utilizado para indicar que existiam elementos de natureza diferente, por exemplo: ovos, dinheiro, brinquedos. Nessas ocasiões, houve, por parte do usuário, a verbalização das palavras localização por quatro vezes (4), posição específica por quatro (4) e quantidade por duas (2). Isso indica que o rótulo, quando percebido, foi corretamente interpretado; contudo, alguns usuários simplesmente ignoraram a presença de tais indicativos. Isso sugere que assim como os demais elementos, os rótulos poderiam ser manipulados pelos usuários e, por conseguinte, favorecer que ele fosse percebido. A seguir, no quadro 36 aparece a interpretação dada pelos usuários para o quadrado em cima do texto. Na ocasião da manipulação do elemento quadrado em cima

Quadro 36 – Elementos presentes na visualização do quadrado em cima do texto

Quadrado em cima do texto	Identificar elemento e posição (3) situação-problema (4), indicação (2), resolução, entender, organização, pensamento, Localização, posição, estado anterior, próximo estado, contexto, não percebeu imagem, não percebeu rótulos, Ajuda(2), fácil(3), multiplicar

Fonte: Do Autor

do texto, como mostrado no quadro 36, houve a verbalização de palavras que mostram que esse elemento serviu de indicador para a ação, bem como palavras que indicam organização do pensamento e compreensão. Isto sugere que a marcação do quadrado em cima do texto, realizada pela interface, contribuiu para a organização do pensamento. A seguir, no quadro 37, os significados para a escolha da categoria de multiplicação. Como

Quadro 37 – Elementos na escolha da multiplicação

Multiplicação	valor, total, item desconhecido, descobrir, quantidade , total , valor unitário , explicação ambígua, elemento presente(4), cota presente(5), posição, alternativas, processo, parte presente(2), sem atenção (2), contexto(2) , dúvida, próximo estado, referência, duvida entre parte e cota, distinguir , proporcionalidade, dividir, cálculo mental , questionamento, multiplicar(2), subtração, selecionar, pausa dez segundos Erro(3), divisão por partes(2), erro consecutivo

Fonte: Do Autor

pode ser visto no quadro 37 na escolha da categoria denominada de **Multiplicação**, o usuário verbalizou alguns elementos que usou como referência. Por exemplo: a cota está presente, a parte está presente. Entende-se, portanto, que a presença ou a ausência, desses elementos, facilitou a categorização. A presença da parte só foi percebida (02) duas vezes, enquanto que a presença da cota foi citada (05) cinco vezes. Isso sugere que os erros, bem como a consecução desses pode ter sido causado pela ausência de percepção do elemento denominado de parte. A seguir, o quadro 38 apresenta os significados para a categoria de

divisão por partes. No quadro 38, os usuários executaram a ação de escolher a categoria

Quadro 38 – Elementos na escolha da divisão por partes

Divisão por partes	cota ausente(3) , sem atenção (3), duvida entre parte e cota(2), contextos , rápido, tentativa e erro, item desconhecido , resultado, sem explicação , valor unitário, Busca, fragmentação, Erro(4), divisão por cotas(4), erro consecutivo , Selecionar. Dividir

Fonte: Do Autor

de **Divisão por Partes**. Nesse momento, eles perceberam a ausência da cota por (03) três vezes; contudo eles apresentaram dúvidas sobre o conceito de **Cota** e de **Parte**. Além disso por três (03) vezes, a ação foi executada rapidamente, ou seja, sem a devida atenção, havendo, ainda, um caso de ação realizada por tentativa e erro. Isso sugere que a confusão de **Divisão por partes** e por **cotas** pode ter conduzido ao erro. A seguir, no quadro 39, aparecem os significados atribuídos no ato da escolha da categoria de **Divisão por cotas**. Como pode ser visto no quadro 39, durante a escolha da categoria Divisão por cotas, por

Quadro 39 – Elementos na escolha da divisão por cotas

Divisão por cotas	item desconhecido(3), quantidade total, resultado, todo , valor unitário, explicação ambígua, frequência, pedaço(parte) do problema, Referência(4), identificar. duvida entre parte e cota(4), estado anterior(4), contexto(3), parte ausente(2), elemento presente, antecipação, cota presente, leitura errada, refazer, falta de alternativas, elemento ausente, arriscar, experiência, busca de pistas no texto , presença da palavra "alguns", descobrir , cálculo mental , bugs de feedback , questionamento, multiplicação , Erro(4), divisão por partes , pausa cinco , quatorze , Selecionar

Fonte: Do Autor

(04) quatro vezes, houve a presença da dúvida sobre cota e parte, por (04) quatro vezes, a presença do estado anterior, e, por (04) quatro vezes ocorreu erro. Em uma (01) ocasião, os usuários confundiram divisão por cotas, com divisão por parte; em outras , disseram que sua escolha havia sido motivada por ser, essa, a última opção oferecida. A ausência da parte foi pouco percebida, apenas (02) duas vezes, isso sugere que os participantes tiveram dificuldade em perceber tal ausência e, logo, esse elemento pode não ter sido foi utilizado na tomada de decisão. A seguir, no quadro 40 aparecem os significados atribuídos durante a visão do diagrama, onde emergiram palavras como: compreensão, descoberta e processo. Além disso, por (03) três vezes, o diagrama foi visto como um tipo de ajuda. A palavra distinguir esteve presente no discurso, indicando que a visão do diagrama contribui na identificação das distinções existentes entre as categorias. A seguir, o quadro 41 mostra os significados associados a interrogação. Como visto no quadro 41, por (09) nove vezes, houve a verbalização do termo quantidade, em seguida, as palavras cálculo

Quadro 40 – Elementos na visualização do diagrama

Visão do diagrama	compreensão(5), ponto de partida(2), descobrir(2), modo(2), processo de resolução, visão , desenvolvimento, relacionamento, interpretação, distribuição elemento, identificar elemento , indicação, informação, confuso , distinguir.

Fonte: Do Autor

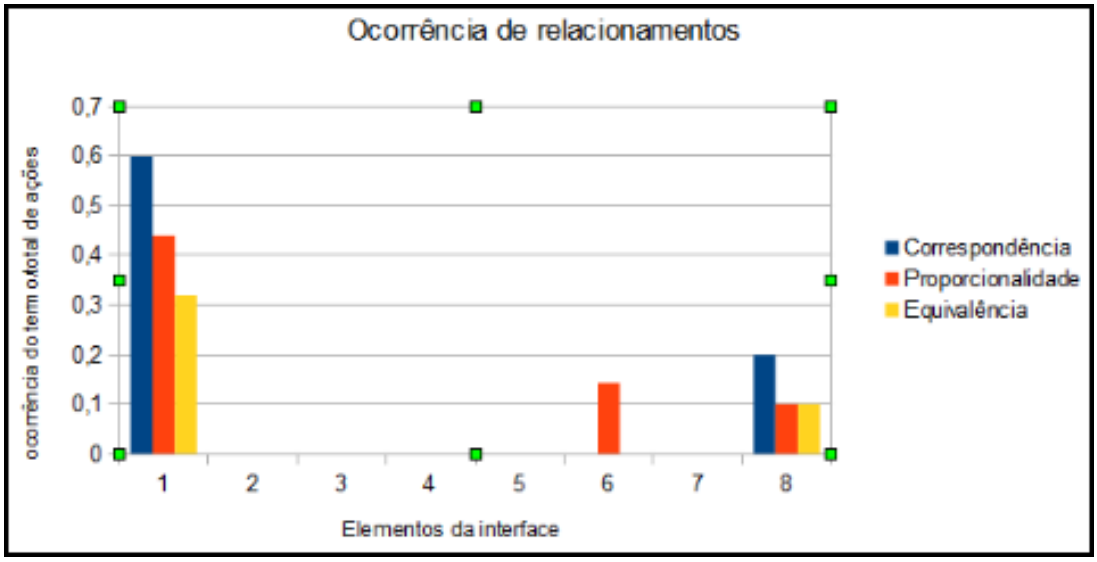
Quadro 41 – Elementos na visualização da interrogação

Interrogação	Quantidade(9), resultado(7), total(4), valor(3), item desconhecido (3), dinheiro (2), parte(2), valor unitário , posição, indicação, resolução, objetivo, Situação-problema(5), localização(3), rever(2), Correspondência(2), Posição, próximo estado, Recomeço, sem atenção , proporcionalidade, equivalência, quadrado em cima da interrogação , rótulos, questionamento, Botão mais dica, pausa(3) onze, dez, nove(2), oito , cinco(2) , Anotação, Texto, Caminho, Posicionar, Melhor, compreensão, certo, erro consecutivo, erro, cálculo mental(8)

Fonte: Do Autor

mental ocorreram por (08) vezes. Por duas (02) vezes, o participante relacionou a inserção do cálculo numérico com dinheiro. Além disso, embora não tenha havido obrigatoriedade de seguir uma sequência na resolução das situações-problema, a presença do quadrado azul em cima do texto impôs que a interrogação fosse posicionada apenas no final da resolução. Por esse motivo, estima-se que o resultado numérico tenha sido decorrente do raciocínio qualitativo demandado durante a resolução da situação-problema. A seguir, na figura 79 , o gráfico ordena os elementos do diagrama pela quantidade de vezes que foi verbalizado os termos "correspondência", "proporcionalidade" e equivalência. Como pode ser visto na figura 79, os termos: **correspondência**, **proporcionalidade** e **equivalência** prevaleceram nas ocasiões em que um número foi manipulado. A interrogação, embora não seja número, depois de posicionada e após o cálculo mental, ela será substituída por um número. O diagrama preenchido representa qualitativamente e quantitativamente a situação-problema. Por esse motivo, interessa-nos saber como o usuário percebe as distinções entre o diagrama vazio e o diagrama preenchido. Para tanto, observemos os resultados no quadro 42 para as quatorze (14) perguntas sobre o diagrama vazio, os usuários o significaram como um objetivo, um símbolo para a situação-problema; houve, além disso, a construção de hipóteses, bem como a percepção de elementos ausentes. Já na visão do diagrama preenchido estiveram presentes as palavras: **compreensão**, **sucesso**, **informação** e **descoberta**. Além disso, como se pode observar, as palavras, foram mais abstratas, relacionadas ao processo em si, e não a aspectos do conceito. Isso sugere que a construção do diagrama, nesse contexto, conduz a percepção de elementos abstratos de natureza metacognitiva. A seguir o quadro 43 mostra as palavras que emergiram

Figura 79 – Legenda - 1- Número; 2- Divisão por cotas; 3- Diagrama; 4 - Divisão por partes; 5 Quadrado em cima do texto; 6- Multiplicação; 7- Rótulo; 8- Interrogação



Fonte: O autor

Quadro 42 – Impressões sobre diagrama

Estado	Elementos na explicação
Vazio	Situação-problema(3) , posição específica (3) , elemento ausente (2), Objetivo(2) , símbolo(2), hipótese sobre ponto de partida , hipótese sobre ponto de chegada, indicação(3), identificar(2), representação, receber informação ,código, certo
Preenchido	situação-problema(4), final(2) , elemento presente(2) , posição , conjuntos , rótulos, resolução(3), melhor(4), compreensão(4), sucesso(5), representação, informação(3), resolução, símbolo, objetivo, descoberta

Fonte: Do Autor

quando os usuários foram perguntados sobre as principais ideias matemáticas quando

Quadro 43 – Principais ideias matemáticas

Elementos na explicação	Multiplicação, subtração, dividir(2),Variar(2), melhor compreensão(3), dica , meio , modo ,lógica, atenção ,calma , ler ,resultado , raciocínio do usuário , seqüência , intuição , análise, parte , categoria, aditivas ,multiplicativa , operação , elemento(2) , contexto

Fonte: Do Autor

houve a verbalização de conceitos sobre multiplicação; entretanto, houve mais elementos de natureza metacognitiva, como por exemplo, quando foi citada a variação do local do item desconhecido. Isso sugere que construir o diagrama contribui na percepção da categoria à qual pertence a situação-problema. Como visto no quadro 44 nas impressões gerais, não

foram verbalizados aspectos negativos, e a decepção ficou por conta da percepção dos erros cometidos pelo particiante. Ou seja, os usuários se decepcionaram ao perceberem o quanto eles erravam na resolução das situações-problema. Isso sugere que tal percepção conduziu à conclusão de que para superar e transpor os erros são necessários, além dos *feedbacks* da interface, motivação, autoconfiança e vontade. Além disso, na coluna (01) um do quadro 44 apareceu a frase "contato com o conceito". Isso indica que alguns participantes perceberam o contato com o conceito proporcionado pela construção do diagrama. A seguir, o quadro 45 evidencia as lembranças do primeiro contato com o software.

Quadro 44 – Avaliação do Software e impressões gerais

Elementos na explicação	Decepção	Surpresa	Para superar as dificuldades
Facilita, compreensão , melhor modo, compreensão , muito bom(2), dica ,não diz que está errado, percepção do erro , refazer, importante , necessidade, meio, modo, contato com o conceito, possibilidades, nova estrutura, categoria , situação-problema , variar posição	frequência do erro, nada(3), erro, percepção do erro.	Desafio, organização, frequência do erro, facilidade em resolver uma situação-problema, muitas descobertas	Estudar, dificuldade na situação-problema, muita prática(2)

Fonte: Do Autor

Quadro 45 – Lembranças do primeiro contato

Elementos na explicação
As professoras responderam muito pouco sobre as primeiras impressões, os predicados ternários envolviam, apenas, pronomes pessoais e elementos como: inovador, estranho, certo, localização, desafiador, incerteza, receio, novidade, muita dúvida, difícil, estranho, desconhecimento. Não houve relacionamentos entre o que estava sendo apresentado e experiências anteriores. Isso só aconteceu durante a interação.

Fonte: Do Autor

Como pode ser visto no quadro 45 , as palavras curiosidade, estranho e inovador predominaram durante o primeiro contato. Entretanto, ao longo do processo, outros termos predominaram, por exemplo, compreensão, entendimento, organização. Com os resultados aqui mostrados, percebe-se que, ao longo da interação, houve uma mudança no discurso, que pode ser evidenciada no quadro 46, a seguir.

7.7.2 Mudança conceitual

Como pode ser visto na coluna (01) do quadro 46, a divisão por cotas foi a mais desconhecida, e mesmo depois da vivência, no discurso dos participantes, ainda apareceu a palavra difícil. Já a divisão por partes, embora, antes da vivência, tenha aparecido a palavra nada(03) por três vezes, a palavra difícil não apareceu. Isto sugere que houve uma interferência da interface na significação dos conceitos presentes nas Estruturas Multiplicativas.

Quadro 46 – Legenda DC: Divisão por contas; DP: Divisão por partes; M: Multiplicação

Categoria	Antes	Depois
DC	Nada(4)	Posicionamento correto, organização significativa(2), raciocínio, informação, difícil, ideia, avaliação de si mesmo, indicação. dividir quantidades
DP	Nada(3), falta de compreensão, não distinguia, dividir em partes	mais fácil do que usando cálculo mental, visão diferente(2), nova estrutura, guia,valor, ordenação, paciência(2), dinamismo, variação, estudar, prática, percepção da complexidade, processo. dividir o todo pelas partes.
M	Já conhecia, seqüência de várias somas, Nada(2), multiplicar números naturais, estrutura convencional(2),	outro entendimento(2), equivalência, correspondência, ordenação, distinguir as categorias, fácil(2), organização, reflexão, pensar
Todas	Nada, DC(4), DP(3), M(2)	

Fonte: Do Autor

7.8 Discussão

> O progresso do aprendiz pode ser observado por meio do enriquecimento das propriedades do conceito ou por meio da aplicação das mesmas operações em contextos diferentes e com números diferentes(VERGNAUD, 1988, pg-143) , tradução nossa.

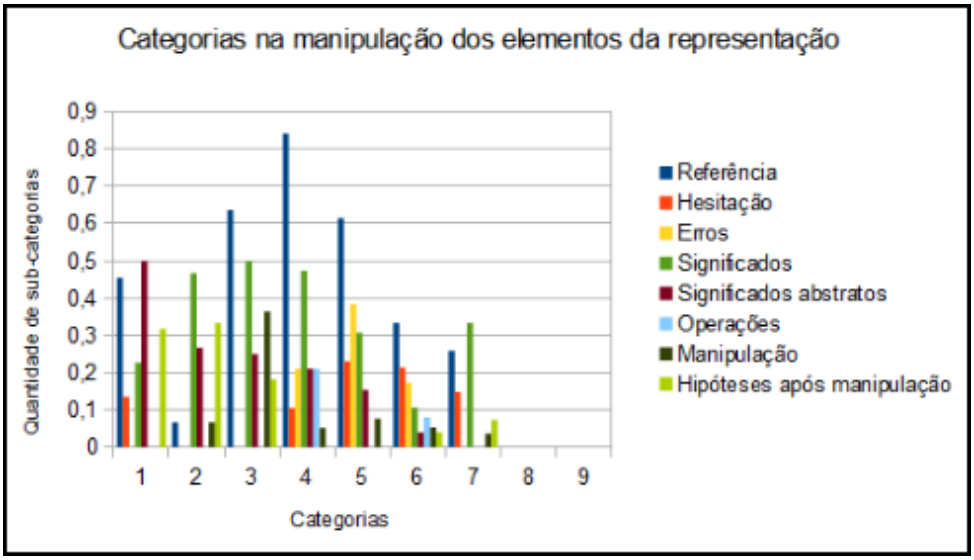
Entretanto, o mesmo autor pontua que para os estudantes mais velhos "*entender o contexto da situação-problema é mais difícil do que realizar as operações numéricas*" (GÉRARD, 1998, pg-143), tradução nossa. Nesse sentido, Ibid., pg-143 reforça que é necessário oferecer aos aprendizes situações-problema diversas, nas quais, as aplicações do conceito sejam exemplificadas de diversas maneiras, pois, segundo Vergnaud (1983) não há motivos para os aprendizes desenvolverem conceitos complexos se não lhe forem apresentadas situações complexas. Nessa mesma linha, tanto Lautert e Spinillo (2002) quanto Rizvi e Lawson (2007) evidenciaram a relevância do processo instrucional. Os primeiros, num contexto que envolvia crianças; os últimos, num contexto de formação de professores. Tanto num contexto quanto no outro, a intervenção instrucional foi um elemento diferenciador no desempenho dos aprendizes.

Nesse sentido, nossos resultados se coadunam com esses, uma vez que, os participantes, embora tenham passado por um curso de nivelamento, seus resultados, tanto no curso quanto durante o experimento foram influenciados pelo grau de escolaridade. Por exemplo, aqueles com maior grau de escolaridade eram mais resistentes, demoravam para aceitar os erros cometidos e, por esse motivo, cometiam-os consecutivamente. Entretanto, após aceitarem, generalizavam rapidamente para outras ações. Já aqueles com menor escolaridade apresentavam pouca resistência e aceitavam facilmente as intervenções para corrigi-los; entretanto, esqueciam as ações anteriormente executadas, bem como seus resultados e, por conseguinte, recebiam *feedbacks*, pelo mesmo erro, repetidas vezes.

7.8.1 Influência dos diagramas na formação de professores

A categorização de Vergnaud (1983), Vergnaud (1988) organiza, sistematiza e propõe uma estratégia de ensino dissociada de estereótipos pedagógicos. O aspecto fundamental de sua teoria é a visão de que conceitos estão enraizados em situações-problema e, portanto, é a partir da vivência com tais situações que aprendizes adquirem habilidades no trato com conceitos. Zazkis e Campbell (1996), por sua vez, realizou estudos dissociados de situações-problema, propondo tarefas para professores sem nenhum suporte de contexto. Como resultado, eles encontraram que para responder as perguntas feitas sobre a tarefa, os professores se apoiavam em mecanismos procedimentais, mas nem sempre, foram capazes de verbalizar os conceitos em termos de objetos que apresentam suas próprias características. Nesse sentido, tanto Zazkis e Campbell (1996) quanto Gérard (1998) apontaram a substantivação de conceitos como indicador de progresso dos aprendizes.

Figura 80 – Legenda 1-Diagrama; 2- Rótulo; 3 - Interrogação; 4 -Divisão por cotas; 5 -Divisão por partes; 6 - Número marcado com um quadrado; 7- Quadrado em cima do texto; 8 -segmento vertical; 9 -Seta horizontal



Ou seja, aquilo que Zazkis e Campbell (1996, pg-551), tradução nossa, denominaram de "*encapsulamento, ou seja, movimento que ocorre do processo para o objeto*".

Nessa mesma linha, Rizvi e Lawson (2007) evidenciaram que o uso dos diagramas de Vergnaud (1983), Vergnaud (1988), num contexto de formação de professores iniciantes, promoveu uma mudança significativa na percepção dos relacionamentos, pois números foram percebidos tanto como representantes de quantidades quanto de relacionamentos entre quantidades. Em suas discussões, os autores apontam o esquema diagramático como importante suporte que pode ajudar professores a desenvolverem esquemas mais coerentes para o conceito de divisão. Neste contexto, o suporte diagramático foi oferecido em uma interface educativa interativa que, inicialmente, foi esquematizada (como protótipo) em papel para minimizar erros relativos à inabilidade com o mouse. Nossos achados se coadunam com Rizvi e Lawson (2007) apontando para elementos que demonstram o desenvolvimento, não apenas de um modelo conceitual, mas evidenciam que, assim como mostrara Ibid., além do diagrama favorecer a identificação de relacionamentos entre quantidades, houve, também, a predominância de termos de natureza meta cognitiva.

7.8.2 Elementos da representação visual que proporcionaram o desenvolvimento a um apropriado modelo conceitual.

A figura 80 mostra os termos que predominaram no discurso dos aprendizes quando eles visualizavam cada parte do diagrama. O gráfico, apresentado na figura 80 , está ordenado por ocorrência de significados abstratos para cada elemento do diagrama. Por exemplo, como pode ser visto no número um (1), eixo X da figura 80 , quando os usuários viram o diagrama, eles verbalizaram uma quantidade maior de termos abstratos.

Já no número 06 seis do eixo X, número marcado com um quadrado- houve poucos elementos abstratos no discurso dos participantes. Além disso, convém mostrar que os elementos (8 - segmento vertical; 9 -Seta horizontal), os quais não apresentam ocorrência de termos, não foram manipulados pelo usuário. Fazem parte do diagrama e foram colocados automaticamente na interface. Essa percepção contribui na identificação de elementos constitutivos da representação potencialmente manipuláveis. Lautert e Spinillo (2002) perceberam que os alunos acertaram mais tarefas de divisão por partes. Da mesma forma, os professores desta pesquisa tiveram mais facilidade em reconhecer a divisão por partes. Durante a entrevista percebeu-se que suas explicavações sobre a escolha pela divisão por cotas, envolviam mais elementos nas respostas e, por conseguinte, a tomada de decisão pode ter sido dificultada. A seguir, o quadro 47 mostra as maneiras que os usuários manipularam os elementos da representação. A visão matricial do quadro 47 mostra as modalidades de

Quadro 47 – Nas linhas está a forma de representação do conceito, na coluna estão as tarefas de mouse. As células preenchidas indicam que houve manipulação do elemento segundo a tarefa disposta na coluna. As células vazias denotam ausência de manipulação da representação segundo a tarefa de mouse presente na coluna; Legenda A:Anotação temporária em cima dos números; P:Posicionar;T: Texto; S:Selecionar; O: Orientação; C:Caminho; Q: Quantificar; M:Menu com duas opções; U: manipulado diretamente pelo usuário - professor ; C: manipulado pelo computador.

	P	A	T	M	S	C	O	Q
Número	C				U			
Quadrado	C	C			U	U		
Rótulos		C						
Seta Vertical	C							
Seta horizontal	C							
Segmento de reta vertical	C							

Fonte: Do Autor

manipulação, bem como os atores responsáveis por tais manipulações. Essa informação, juntamente aos padrões observados durante o experimento forneceram indícios de como se deu a potencial progressão dos conceitos durante a realização da tarefa. Por exemplo, como visto no quadro 46, antes de iniciar a construção dos diagramas, os participantes disseram não saber nada sobre cada categoria das Estruturas Multiplicativas; contudo, depois da construção, houve uma mudança no discurso, notadamente, quanto ao número de elementos presentes no cenário da atividade. Em outras palavras, os participante perceberam que havia um número maior de elementos na resolução das situações-problema, os quais, anteriormente, não eram percebidos.

7.9 Conclusão

Neste estudo, mostrou-se que o método procedimental de resolução, associado ou não a um contexto, pode esconder dos aprendizes elementos e relacionamentos relevantes das situações-problema. Construir diagramas, bem como manipular seus elementos constitutivos, no entanto, possibilita explicitar mais elementos e relacionamentos imersos nas situações-problema e, por conseguinte, é um mecanismo de ação voltado para explicitar: papéis diferentes assumidos por um mesmo elemento, uma maior quantidade de elementos presentes em um mesmo conceito ou em conceitos diferentes.

8 Considerações finais

Segundo Vergnaud (2009), o sentido é atividade mobilizada na situação. Além disso, se não houver ação em determinada situação, essa não fará sentido e, portanto, não será um bom problema VERGNAUD, op. cit.. Em outras palavras, as propriedades relevantes em representações precisam ser um simbolismo com o qual se possa operar (MAHONEY, 1980 *apud* (KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002) . Nesse sentido, as interfaces de usuários, juntamente às suas modalidades de interação ampliam as possibilidades de significação dos conceitos metaforicamente representados(SEDIG; SUMNER, 2006). No contexto deste estudo, foi possível testar as modalidades de interação presentes no 11 e o RMDC- Manipulação Direta de Reflexiva de Conceitos, quando é ofertada *feedbacks* durante a resolução de situações-problema; entretanto, dessas, outras necessidades foram observadas: (1) necessidade de buscar determinado elemento no texto, identificado como mais importante, principal ou mais significativo; (2) necessidade de rearranjar o texto numa organização espacial diferente da proposta. Esses últimos resultados foram acrescidos aos presentes no quadro 47 e colocados na quadro 48, onde cada elemento da representação pode ser manipulado segundo as modalidades de interação disposta nas colunas. Entretanto, nas linhas (09) novo, (10) dez e (11) onze do quadro 48 aparecem: o **número relativo**, a **base da comparação** e o **todo da composição**. Esses elementos foram identificados como mais significativos. Ou seja, aquele cuja presença indicaria a categoria a qual pertence a situação-problema.

8.1 Presença de elementos significativos

Os participantes resolveram cada situação-problema de maneira sequencial. Havia o primeiro elemento, escolhido pela interface, e a partir do posicionamento desse, outros iam sendo posicionados. Entretanto, o grau de escolaridade distinguiu os participantes, notadamente, na escolha desse primeiro elemento. Aqueles com menor grau de escolaridade adotaram uma sequência, contudo seguiam a sugestão dada pela interface. No entanto, a participante com maior escolaridade, embora usasse sequência, realizava, primeiramente e mentalmente, uma busca no texto para encontrar a base da comparação, representada na figura 81 na cor laranja, ou o número relativo, representado na figura 82 por um círculo acompanhado por um menu com duas opções para escolha do sinal, ou o Todo da composição que aparece na figura 81 na cor amarela, para, em seguida, posicionar os números.

Por exemplo, para a Composição de Medidas vista na figura 81 existem três quadrados e uma chave; algumas professoras preenchiam, primeiramente, o quadrado

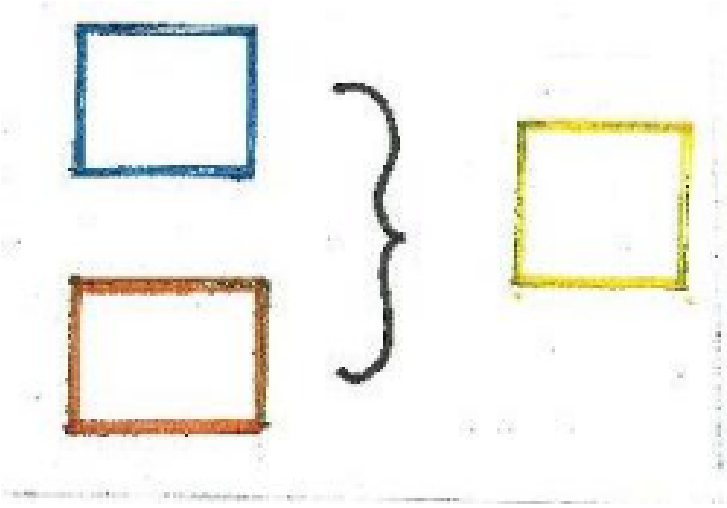
Quadro 48 – Elementos da representação X modalidade de Interação

	MDRC		Anotação temporária em cima dos números		Menu com duas opções		Buscar		Rearranjar	
Chave	U,C									
Quadrado colorido	U,C		C							
Círculo colorido	U,C		C							
Quadrado	U,C		C							
Círculo	U,C		C							
Seta Vertical	U,C									
Seta horizontal	U,C									
Número natural	U									
Número relativo	U						U			
Base da comparação	U						U			
Todo da composição	U		C				U			
Sinal			C		U					

Fonte: Do Autor.

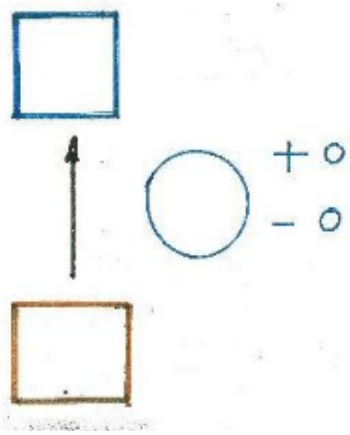
superior, depois o inferior e, por último, o quadrado da direita da chave. Cada situação-problema, portanto, foi resolvida sequencialmente. O primeiro elemento era escolhido pela interface. A partir do posicionamento desse, outros iam sendo posicionados. Entretanto, o grau de escolaridade distinguiu os participantes, notadamente, na escolha desse primeiro elemento. Os participantes com menor grau de escolaridade adotaram sequência como mecanismo de preenchimento do diagrama, contudo, seguiam as sugestões da interface. Já aquela com maior escolaridade, embora usasse sequência, fazia, primeiramente, uma busca no texto para encontrar a base da comparação, representada na figura 81 na cor laranja, ou o número relativo, representado na figura 82 por um círculo acompanhado por um menu com duas opções para escolha do sinal, ou o Todo da composição que aparece na figura 81 na cor amarela, para, em seguida, posicionar os números. Por exemplo, para a Composição de Medidas existem três quadrados e uma chave; algumas professoras preenchiam, primeiramente, o quadrado superior, depois o inferior e, por último, o quadrado da direita da chave.

Figura 81 – Diagrama de Composição de medidas



Fonte: O autor construida a partir (VERGNAUD, 1986)

Figura 82 – Diagrama de Comparação de medidas



8.2 A influência da flexibilidade oferecida pelo ambiente notacional.

O mundo consensual é um dispositivo notacional e sobre ele as pessoas organizam seu pensamento e se comunicam por meio de sua gramática, ou seja, pelas restrições impostas na cultura, nos costumes e na linguagem(KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002). Por esse motivo a

> importância de se descrever, tão sistematicamente quanto possível, as maneiras como as pessoas usam alguns aspectos de seus mundos (notações) para representar, para eles mesmos, outros aspectos para pensar ou para se comunicar KAPUT; NOSS; HOYLES, op. cit., pg-58, tradução nossa.

Nesse sentido, a flexibilidade de manipulação oferecida na interface permite analisar diferentes significados atribuídos aos conceitos metaforicamente representados. Em outras palavras, para entender como notações são utilizadas na construição significado é preciso

permitir que tal dispositivo notacional seja flexível e, nesse contexto, apresentar flexibilidade significa oferecer diferentes modalidades de interação(SEDIG; KLAWE; WESTROM, 2001; SEDIG; SUMNER, 2006). Por exemplo, na busca pela **base da comparação**, pelo **número relativo** e pelo **todo da composição**, a participante, fazendo movimento com os dedos, tentou buscar tais elementos no texto. Fez um movimento de mãos em direção ao texto, como se quisesse dividi-lo, fragmentá-lo, alterar sua configuração espacial, para que o tal elemento, dito principal, se tornasse evidente. Oferecer tais mecanismos de manipulação irá favorecer, portanto, que tais possibilidades de manipulação sejam usadas e, dessa forma, possam significar os elementos, quantidades e relações no texto, ou encontrando novos elementos, ou os mesmos assumindo novos papeis.

8.3 Desdobramentos da Tese

Embora os resultados sobre o uso de representações voltadas para ensinar matemática dependam do contexto da tarefa(BORBA, 2002; ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007; GAGATSIS; ELIA, 2005; GAGATSIS; ELIA, 2004; GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, 2001; HARRIES; BARMBY, 2007; HARRIES; SUGGATE, 2006; LAUTERT; SPINILLO, 2002; MICHAELIDOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004; SELVA; FALCAO; NUNES, 2005; SELVA, 2004), existem propriedades da representação, as quais, independentemente dos elementos presentes no contexto, são contíguas ao conceito metaforicamente representado(DE-SOUZA; SEDIG, 2001; GÉRARD, 1998; VERGNAUD, 1988). Essa interseção de propriedades é denominada de homomorfismo entre expressões da representação e os conceitos representados(GÉRARD, 1998; VERGNAUD; PRÉVOST, 1994).

Por exemplo, Harries e Barmby (2007) analisaram as propriedades e características da operação de multiplicação: **replicação**; **uso de operações binárias**; **comutatividade** e **distributividade** mostrarando que a presença de tais propriedades confere à expressão da representação outro *status* frente à resolução das tarefas tornando, assim, adequada para ser usada em operações que envolvem multiplicação. Antes de Ibid., Gérard (1998) exemplificara homomorfismo usando o papel exercido pelas linhas paralelas e colunas paralelas, as quais, juntamente à magnitude, bem como com às propriedades do plano apresentam homomorfismo ao conceito de proporcionalidade, logo, seria mais adequada para ensiná-lo.

Nessa mesma linha, Sedig, Klawe e Westrom (2001), por exemplo, utilizam um arco de circunferência para representar o conceito de rotação, tal arco possui dois pontos de controle: a cabeça do arco possibilita modificar o ângulo de rotação, enquanto que o centro possibilita modificar o centro de rotação da imagem. Os exemplos dados por Harries e Barmby (2007), Sedig, Klawe e Westrom (2001), Gérard (1998) mostram que existem meios

para observar possíveis intersecções entre as propriedades de uma dada representação e as propriedades do conceito por ela representado. Por esse motivo, pesquisas de longo termo precisariam ser iniciadas para complementar os resultados aqui ofertados, no sentido de identificar novas representações, bem como modalidades de interação que tenham colaborado no processo de significação, especificamente, sobre Estruturas Aditivas e Multiplicativas.

8.4 A influência da constância dos estudos e da prática.

Cada experimento demorava aproximadamente (02) duas horas, e se tornou muito cansativo para os participantes; entretanto, vale salientar que dividi-lo em episódios de uma (01) hora, por exemplo, não seria uma solução melhor, pois, entre um experimento e outro, alguns participantes, notadamente aqueles com menor escolaridade, esqueciam os conceitos vistos nos experimentos anteriores. Esse esquecimento foi percebido durante a execução do experimento piloto, realizado para refinar o protótipo, bem como a atuação do experimentador. Nos experimentos aqui descritos ficou claro que para alcançar nossos objetivos de pesquisa, não poderia haver interrupções prolongadas entre um experimento e outro, pois alguns professores esqueciam os conceitos, principalmente, o processo de categorização.

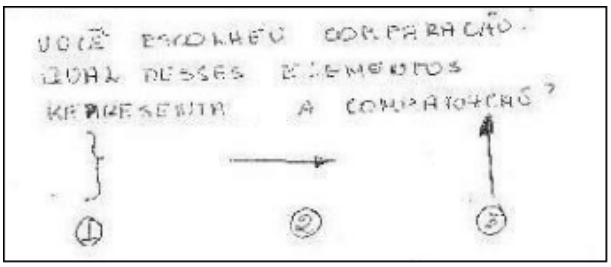
8.5 Limitações da Tese

Durante os experimentos, foram ofertados alguns *feedbacks* visuais, por exemplo, quadrado e círculos em cima de elementos do texto, cores diferenciadas e mensagens. Entretanto, Wood, Bruner e Ross (1976) mostram que as ajudas podem tornar-se desnecessárias. Portanto, além das formas e cores, a **chave**, assim como as **setas**, vertical e horizontal, bem como as **mensagens de questionamento e instrução** também precisam ser removidas. Em outras palavras, todos os tipos de *feedback* inclusive os diagramas das figuras 55 e quadro 3, bem como seus elementos constitutivos devem ser removidos. Entretanto tal remoção, não poderia ser feita de qualquer maneira. É necessário, portanto, além de retirar itens, propor um modelo dessa retirada que, comparativamente a outras estratégias, apresente melhores resultados, no que diz respeito a contribuir para desenvolver autonomia nos aprendizes. Esse processo não foi realizado e, portanto, carece de mais experimentos e observações na proposição de um modelo de retirada gradativa de ajudas.

8.6 Impressões não evidenciadas nos dados.

Embora algumas observações não tenham sido predominante no grupo, faz-se necessário mostrá-las, pois estiveram presentes na tomada de decisão de alguns participantes.

Figura 83 – Componente para selecionar a representação



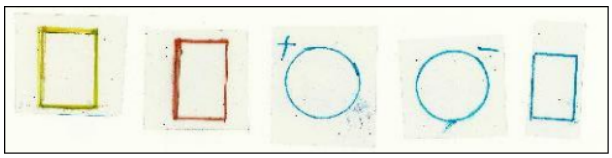
8.6.1 O ponto de partida das ações pode diminuir o espaço de busca.

Os dados não evidenciaram, mas permitiram prevê que durante a resolução de cada situação-problema, usar diferentes pontos de partidas (ações físicas e mentais) pode determinar rotas diferentes e, assim, estratégias mais demoradas ou menos demoradas. Embora a estratégia usada pela participante de maior escolaridade, que buscava, primeiramente, os elementos identificados como mais significativos, tenha parecido ser mais rápida, nem sempre atingiu o objetivo. Por exemplo, quando o elemento, dito mais significativo, era o item desconhecido, a participante ficava perdida, pois lhes faltava a instância diretamente observável por meio de um número. Ou seja, a referência, anteriormente buscada, era, nessas situações, representada pela figura da interrogação.

8.6.2 Influência da manipulação nos gestos das participantes

Na figura 83 existem três elementos: a **chave**, que representa a categoria de **Composição de Medidas**, a **seta** horizontal, que representa a categoria de **Transformação aplicada a uma medida**, e a **seta** vertical, que representa a categoria de **Comparação de Medidas**. Para explicitar a categoria escolhida anteriormente: Composição, Comparação ou Transformação, a interface mostra a figura 83 e, em seguida, solicita que seja selecionada uma das três imagens (1), (2) ou (3). Embora houvesse sucesso na escolha da representação adequada, durante a explicação de suas escolhas, alguns participantes faziam gestos com as mãos sem, contudo, diferenciá-los. Ou seja, os participantes faziam sempre o mesmo gesto para as três categorias, mostrando que não havia percebido nem o formato da chave, nem a direção ou sentido das setas, horizontal e vertical. O protocolo de mouse denominado **selecionar**, usado para manipular os elementos da figura 83, não favoreceu, portanto, a percepção de sentido ou direção. Logo, isso sugere que, para favorecer tal percepção deva haver movimento de mãos que indique tais aspecto como propriedade do conceito. Por exemplo, uma das participantes disse que, até o momento em que precisou selecionar os elementos da figura 83, não havia percebido, sequer, diferenças no formato da representação, quais sejam: chave, seta vertical e seta horizontal.

Figura 84 – Componentes para marcar elementos no texto



8.6.3 Tarefa com indicadores se torna mais difícil

A figura 84 , apresenta três quadrados e dois círculos: um acompanhado de sinal positivo e outro, acompanhado de sinal negativo. Além disso, os quadrados ainda apresentam cores distintas. Esses elementos foram usados para mostrar similaridades entre os elementos do texto e o seu papel no diagrama. Um dado interessante surgiu, quando uma das participantes falou sobre a presença e ausência dos quadrados e círculos em cima do texto. Além de não perceber as cores, afirmou ainda que a presença dos quadrados e círculos tornava a tarefa mais difícil, pois forçava um posicionamento adequado e, embora com o risco de errar e, por conseguinte, repetir a operação, preferia realizar a ação sem o quadrado e sem o círculo, pois, na sua percepção, a ação, dessa forma, era mais rápida e mais direta.

Acreditamos que possa haver uma vinculação dessa dificuldade, vivenciada pela participante, com o esforço realizado na ação. Ou seja, na presença dos indicativos, o esforço da ação não era somente para selecionar, mas também para posicionar o item anteriormente selecionado e cuja regra de posicionamento deveria obedecer. Em outras palavras, quando os componentes da 84 foram posicionados em cima de elementos do texto, nasceu uma expectativa que precisava ser atendida. Ou seja, uma vez selecionado determinado item, haveria um próximo estado a ser alcançado, enquanto que, sem os indicativos, não havia e, portanto, deixava a ação de poisicionar o elemento no texto mais livre. Esse dado é interessante, pois das sete professoras, apenas duas fizeram essa observação; o restante das participantes associou os indicativos a elementos que facilitaram a tomada de decisão.

Uma das maneiras de oferecer ajuda é problematizar a situação mostrando todos os elementos presentes no cenário, evidenciando-os e, por conseguinte, torná-los perceptíveis (REISER, 2002). Isso, segundo Ibid. , torna as tarefas mais difíceis, e neste contexto, a dificuldade identificada pelas participantes repousava no fato de que havia uma diminuição do grau de liberdade da ação, ou seja, não poderia ser movido qualquer elemento, mas somente aquele anteriormente selecionado. A presença do quadrado sobre cada elemento teve, portanto, dois significados: o primeiro foi indicar o elemento a ser posicionado; o segundo foi reduzir o grau de liberdade da ação, determinando, assim, o ponto de partida da construção do diagrama.

Figura 85 – Texto e diagrama

Fonte: (BRAGA; QUEIROZ; GOMES, 2008)(QUEIROZ et al., 2010)

8.6.4 Ações semanticamente guiadas pelo texto e pela construção do diagrama.

Existem dois tipos de notações, aquelas que mostram informações, como por exemplo, tabelas de dados e gráficos de coordenadas, e aquelas que são alvo de ações, tais como: expressões algébricas e expressões aritméticas((KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002). Na figura 85, a representação textual mostra ao participante a situação-problema a ser resolvida. Já a representação diagramática oferece um mecanismo de ação sobre as quantidades presentes no texto, sejam essas representadas por um números ou por uma interrogação. Ou seja, os elementos são posicionados no diagrama segundo o papel exercido por ele na situação-problema.

Entretanto, embora o diagrama seja utilizado para representar metaforicamente os elementos do texto e suas relações, ele apresenta uma sintaxe diferente do texto, ou seja, um conjunto de regras de posicionamento que guiam sua construção(KAPUT; NOSS; HOYLES, 2002). Na construção de diagramas a partir de textos, Ibid. diferencia dois tipos de ações: **aquelas semanticamente guiadas e aquelas sintaticamente guiadas**. Naquelas, as ações são guiadas pelo significado do texto, nessas, pelas regras de construção de diagramas, ou seja, pela sintaxe do digrama; tanto pelas restrições presentes em diagramas quanto por suas modalidades de interação. Por esse motivo, Ibid. diz que, durante a construção de diagrama, há uma perda temporária das conexões existentes entre o texto e o diagrama em construção KAPUT; NOSS; HOYLES, op. cit.. Nesse estudo,

observou-se que as ações foram semanticamente guiadas, ou seja, guiadas pelo significado do número no texto. Isto sugere que, por ser o texto mais conhecido, tenha sido utilizado como referência para construir o diagrama.

A representação verbal ou texto é primeira referência para a resolução da situação-problema(ELIA; GAGATSIS; DEMETRIOU, 2007). Nesse sentido, não tenha sido evidenciada nos dados, esse indício se coadunam com os encontrados pelos Ibid.; entretanto, eles avançam mostrando que, desde que haja meio de interação, neste caso, diagramas manipuláveis, tal manipulação pode influenciar na nova significação do texto, e, por conseguinte, servir como nova referência para a tomada de decisão. Por exemplo, a participante, com o maior grau de escolaridade, após resolver algumas situações-problema, tentou buscar um elemento específico no texto. Para tanto, fazia movimento com as mãos como se quisesse modificar a disposição textual dos números. Concluída as modificações no texto, o diagrama seria construído com base, agora, nessa nova disposição textual. Nessas situações percebeu-se que houve uma via de mão dupla: à medida que o texto serviu como referência para construir o diagrama, o diagrama, por outro lado, serviu de referência para mudar a disposição dos elementos no texto. Tal situação é exemplificada no quadro 49, a seguir.

Quadro 49 – Situações-problema do campo aditivo

Situação-Problema: Ana tem sete vestidos, dois são vermelhos. Quantos são os amarelos?	
Linha	Transcrição
01	Entrevistador: tendo recebido essa mensagem você apontou com o dedo alguns elementos da situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): então, no inicio eu tinha colocado na minha cabeça, aquelas duas informações iniciais, que estaria comparando vermelhos com amarelos, deu uma compreensão equivocada, ai coloquei isso dentro de mim, tava tentando ser teimosa com isso.
02	Entrevistador: você escolheu comparação para esta situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): teimosia agora, ainda tava imaginado que seria assim. Não tava conseguindo vê as outras, a possibilidade de as outras estarem nela, eu olhava transformação, composição, mas não achava elementos que me davam a entender que não seria comparação
03	Entrevistador: você recebeu uma mensagem, que dizia "quando uma quantidade é comparada com outra quantidade" o que você entendeu, ou melhor, o que significou essa mensagem para você na situação-problema? Professor (a): ai eu voltei para a situação-problema e busquei outra base de comparação, ai, eu não achei, não achei uma única informação, não estava comparando nada
04	Entrevistador: tendo recebido a mensagem, novamente você aponta com os dedos elementos da situação-problema, como você explicaria isso? Professor (a): eu tava tentando entender o todo, quando eu fiz isso, aquele movimento para o 7 eu tava tentando achar o todo e ai já encaixar em uma outra categoria

Fonte: Do Autor.

Na linha 01 do quadro 49, o usuário aponta as cores, vermelhos e amarelos, como indicadores da categoria de Comparação. Ele acredita, portanto, que em função de

existirem cores distintas, a situação é de comparação de medidas. Na linha 02, quando questionada, ela disse não ter achado, no texto, elementos que a fizessem excluir a opção de comparação. Em seguida, na linha 03, aparece a mensagem: "quando uma quantidade é comparada com outra quantidade". Por sua vez, ela volta ao texto e, nas suas palavras, "busca" o elemento base da comparação, quando percebe que tal elemento está ausente, percebe, por conseguinte, que na situação-problema não existe nenhuma comparação. Com o discurso do quadro 49, foi possível sequenciar as hipóteses assumidas pela participante:

- **Hipótese 01**: a distinção de cores indica comparação;
- **Hipótese 02**: a presença do elemento base, ou referente, indica comparação.

Na linha (03) três, a participante percebe que o elemento procurado está ausente. Na linha (04) do quadro 49, no entanto, volta ao texto e busca outros elementos significativos, quais sejam: a **Base da comparação** e o **Todo da composição**. Esse exemplo mostra que as necessidades do quadro 19 - Contingências observadas nos usuários com mais alta escolaridade foram decorrentes da vivência com os diagramas. Ou seja, agora, era o diagrama quem influenciava as mudanças no texto. Dessa forma, surgiram novos papéis para os elementos presente no texto cuja identificação foi decorrente da interação entre o usuário, a representação (nesse contexto, os diagramas e seus elementos), bem como por suas modalidades de interação. Sendo assim, como disse Vergnaud (1986) ,

> a descrição dos estados gerais de desenvolvimento, proposto por Piaget, não permite compreender o desenvolvimento das competências-conhecimentos implicados nos problemas de subtração, como categorizado por ele, são necessários, portanto, modelos bem mais finos, diretamente associados no contexto matemático dos problemas VERGNAUD, op. cit.

Referências

ACIOLY-RéGNER, N. M.; BRITO, A. P. D. A. M.; SPINILLO, A. G. Psicologia da educação matemática. In: *Segundo Simpósio Internacional em Educação Matemática*. [s.n.], 2008. Disponível em: <http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/organ1.html>.

ANSER, M. A. C. I.; JOLY, M. C. R. A.; VENDRAMINI, C. M. M. Avaliação do conceito de violência no ambiente escolar: visão do professor. *Revista Psicologia: Teoria e Prática*, v. 5, n. 2, p. 67–81, 2003.

ARAÚJO, C. H.; LUZIO, N. *O ensino da matemática na educação básica*. [S.l.]: Inep, 2004.

ARAÚJO, C. H.; LUZIO, N. *Qualidade da educação: uma nova leitura do desempenho dos estudantes da 3a série do ensino médio*. [S.l.]: Brasília, 2004.

BAILEY, B. P.; AL. et. Adapting paper prototyping for designing user interfaces for multiple display environments. *Personal and Ubiquitous Computing*, v. 12, n. 3, p. 269–277, 2007. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1348811.1348816>.

BORBA, R. E. d. S. *Resolvendo problemas aditivos com números relativos*. Masters Thesis — [s.n.], Recife, 2002.

BRAGA, M. M.; QUEIROZ, A. E. de M.; GOMES, A. S. Design de software educacional baseado na teoria dos campos conceituais. In: *Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE)*. [S.l.: s.n.], 2008. v. 1, n. 1, p. 239–248.

BREDEWEG, B.; LIEM, J.; BOUWER, A.; SALLES, P. Curriculum for learning about qr modelling. *Naturnet-Redime, STREP EU FP6 project*, n. 004074, p. D6, 2006.

BRENT, E.; SLUSARZ, P.; THOMPSON, A. *QualrusManual.pdf (objeto application/pdf)*. 2002. Idea Works, Inc. Disponível em: <http://www.ideaworks.com/download/qualrus/QualrusManual.pdf>.

BRENT, E.; SLUSARZ, P.; THOMPSON, A. Qualrusmanual.pdf (objeto application/pdf). Idea Works, Inc., 2002. Disponível em: <http://www.ideaworks.com/download/qualrus/QualrusManual.pdf>.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Na vida dez; na escola zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. *Cadernos de pesquisa*, n. 42, p. 79–86, 1982.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. *Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática*. São Paulo: Cortez ed., 2006.

CORREIA, M. F. B. A constituição social da mente: (re)descobrindo jerome bruner e construção de significados. *Estudos de Psicologia (Natal)*, v. 8, n. 3, p. 505–513, 2003. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-294X2003000300018&lng=en&nrm=iso&tlng=pt>.

DE-SOUZA, C. S.; SEDIG, K. Semiotic considerations on direct concept manipulation as a distinct interface style for learnware. p. 1–12, 2001. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.88.412&rep=rep1&type=pdf>.

DOUGLAS, M.; RANDALL, S. *A Course in Mathematical Modeling*. Washington, D.C: The Mathematical Association of America, 1999. 400 p. ISBN 088385712X.

ELIA, I.; GAGATSIS, A.; DEMETRIOU, A. The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, Elsevier, v. 17, n. 6, p. 658–672, 2007.

FERREIRA, M. N. P.; SELVA, A. C. V. 70817-a concepção de professores sobre o uso da calculadora: O que ainda se pensa? o que se faz? 2008.

FIRSTSCHOOL, y. *Arrow Cards*. 2010. <//www.firstschoolyears.com/numeracy/placevalue/resources/Arrow%20Cards.pdf>.

FLICK, U. Entrevistas semi-estruturadas. *Uma introdução à pesquisa qualitativa*, Bookman Porto Alegre, v. 2, p. 89–106, 2004.

GAGATSIS, A.; ELIA, I. The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, ERIC, 2004.

GAGATSIS, A.; ELIA, I. A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in cyprus and greece. In: *CERME*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 4, p. 2005.

GÉRARD, V. A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 167–181, 1998.

GOLDIN, G.; KAPUT, J. A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In: STEFFE, L. P.; NESHER, P. (Ed.). *Theories of Mathematical Learning*. Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 397–430. Disponível em: <http://www.webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Golding.doc>.

GOLDIN, G. A. Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 137–165, 1998.

GOLDIN, G. A. Representations and the psychology of mathematics education: part ii. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 2, n. 17, p. 135, 1998.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. Macmillan Publishing Co, Inc, 1992.

GREER, B. The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction*, Elsevier, v. 14, n. 5, p. 541–548, 2004.

GUIMARÃES, G. L.; GITIRANA, V.; ROAZZI, A. Interpretando e construindo gráficos. *Anais da 24a Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa-ANPED*, 2001.

HARRIES, A.; SUGGATE, J. Exploring links across representations of numbers with young children. *International journal for technology in mathematics education.*, Research Information, v. 13, n. 2, p. 53–64, 2006.

HARRIES, T.; BARMBY, P. Representing and understanding multiplication. *Research in mathematics education*, Taylor & Francis, v. 9, n. 1, p. 33–45, 2007.

HARRISON, S.; TATAR, D.; SENGERS, P. The three paradigms of hci. In: *Alt. Chi. Session at the SIGCHI Conference on human factors in computing systems San Jose, California, USA*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1–18.

HATANO, G. Cost and benefit of modelling activity. commentary. *Learning and Instruction*, ERIC, v. 7, n. 4, p. 383–87, 1997.

HELLMEISTER, A. C.; DRUCK, S. et al. Explorando o ensino da matemática: artigos. *Organização geral de Suely Druck. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica*, v. 1, 2004.

KAMII, C. *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos*. [S.l.]: Papirus Editora, 1983.

KAPUT, J.; NOSS, R.; HOYLES, C. Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. *Handbook of international research in mathematics education*, p. 51–75, 2002.

KAPUT, J. J. The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, Springer, p. 379–397, 1994.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia: Teoria e pesquisa*, SciELO Brasil, v. 18, p. 237–246, 2002.

LIANG, H.-N.; SEDIG, K. Characterizing navigation in interactive learning environments. *Interactive Learning Environments*, Taylor & Francis, v. 17, n. 1, p. 53–75, 2009.

LINUX, e. *kturtle,linguagem-logo*. 2010. <http://downloads.linuxeducacional.com/educativos/kturtle-linguagem-logo>.

MACKWORTH, N. H. Originality. *American Psychologist*, v. 20, p. 51–66, 1965. ISSN 0003-066X. Disponível em: <http://content.apa.org/journals/amp/20/1/51>.

MAGINA, S.; AL. et. *Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. 1. ed. São Paulo: [s.n.], 2001. 63 p. ISBN 978-8587564245.

MATHOPENREF. *Line Segment*. 2010. <https://www.mathopenref.com/linesegment.html>.

MERENLUOTO, K.; LEHTINEN, E. Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, Elsevier, v. 14, n. 5, p. 519–534, 2004.

MICHAELIDOU, N.; GAGATSIS, A.; PITTA-PANTAZI, D. The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, ERIC, 2004.

MICROSOFT, S. *Human Interaction Design*. 2010. <http://www.hcii.cmu.edu/M-HCI/2010/MicrosoftStudio/process.html>.

MILLER, K. F. Representational tools and conceptual change: The young scientist's tool kit. *Journal of Applied Developmental Psychology*, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 21–25, 2000.

MORETTI, D. M.; BORBA, R. E. de S. O que os alunos já sabem dantes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo. In: . [S.l.: s.n.], 2004. p. 6–7.

MOREY, J.; SEDIG, K. Using indexed-sequential geometric glyphs to explore visual patterns. In: SPRINGER. *International Conference on Computational Science*. [S.l.], 2004. p. 996–1003.

MOURA, Q. d. *Gerard, uma interface educativa para ensino de Estruturas Aditivas e Multiplicativas*. Graduação Trabalho de conclusão de curso — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina, 2010.

NORMAN, D. A. The way i see it: Signifiers, not affordances. interactions 15, 6: 18–19. *Google Scholar Google Scholar Digital Library Digital Library*, 2008.

PREDIGER, S. The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 3–17, 2008.

QUEIROZ, A. E. d. M.; GOMES, A. S.; GOMES, C. R. A.; BARRETO, S. d. O. M. Análise da aprendizagem mediada por uma interface educativa voltada para resolução situações aditivas com suporte diagramático. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, v. 18, n. 03, p. 19, 2010.

QUEIROZ, A. E. de M.; GOMES, A. S. Efeitos da manipulação direta reflexiva na resolução de problemas sobre estruturas aditivas. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, v. 16, n. 02, 2008.

QUEIROZ, A. E. de M.; GOMES, A. S.; ROBERTA, C.; GOMES, A. Análise da aprendizagem mediada por uma interface educativa voltada para resolução situações aditivas com suporte diagramático. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, v. 18, n. 3, 2010.

QUEIROZ, A. E. de M.; GOMES, A. S.; ROBERTA, C.; GOMES, A.; QUEIROZ, S. S. de. Effects of scaffoldings on interactive diagram constructions in educational interface for elementary school teachers training. In: *Proceedings of the 2011 ACM Symposium on Applied Computing*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1212–1213.

REISER, B. J. Why scaffolding should sometimes make tasks more difficult for learners. In: *Proceedings of CSCL*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 255.

RETTIG, M. Prototyping for tiny fingers. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 37, n. 4, p. 21–27, 1994.

RISTUM, M.; BASTOS, A. C. d. S. Violência urbana: uma análise dos conceitos de professores do ensino fundamental. *Ciência & Saúde Coletiva*, SciELO Brasil, v. 9, p. 225–239, 2004.

RIZVI, N. F.; LAWSON, M. J. Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, ERIC, v. 8, n. 2, p. 377–392, 2007.

SEDIG, K.; KLAWE, M.; WESTROM, M. Role of interface manipulation style and scaffolding on cognition and concept learning in learnware. *ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)*, ACM New York, NY, USA, v. 8, n. 1, p. 34–59, 2001.

SEDIG, K.; SUMNER, M. Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Springer, v. 11, p. 1–55, 2006.

SEDIGHIAN, K.; WESTROM, M. Direct object manipulation vs. direct concept manipulation: Effect of interface style on reflection and domain learning. In: SPRINGER. *People and Computers XII: Proceedings of HCI'97*. [S.l.], 1997. p. 337–357.

SELTER, C.; PREDIGER, S.; NÜHRENBÖRGER, M.; HUSSMANN, S. Taking away and determining the difference—a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics*, Springer, v. 79, p. 389–408, 2012.

SELVA, A. C. V. Um experimento de ensino sobre a resolução de problemas de estrutura aditiva a partir de gráficos de barra. *Procs. of 26ª Reunião Anual da ANPED*, 2003.

SELVA, A. C. V.; FALCAO, J. T. d. R.; NUNES, T. Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, ERIC, v. 4, p. 161–168, 2005.

SELVA, A. C. V.-U. Crianças da educação infantil explorando gráficos de barras. *Anais da 27ª Reunião Anual da Anped, Caxambú*, 2004.

SHNEIDERMAN, B. *Designing The User Interface: Strategies for Effective Human-Computer Interaction, 4/e (New Edition)*. [S.l.]: Pearson Education India, 1987.

SINGER, F. M. The dynamic infrastructure of mind—a hypothesis and some of its applications. *New Ideas in Psychology*, Elsevier, v. 27, n. 1, p. 48–74, 2009.

SNYDER, C. *Paper prototyping: The fast and easy way to design and refine user interfaces*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2003.

SOEGAARD, M. *26. Interaction Styles*. 2010. <http://www.interaction-design.org/encyclopedia/interaction_styles.html>.

SOUZA, C. d.; LEITE, J. C.; PRATES, R. O.; BARBOSA, S. D. Projeto de interfaces de usuário: perspectivas cognitivas e semióticas. In: *XIX Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 420–470.

STEWART, J. *Cálculo II volume 2*. [S.l.]: 2005, 2005.

TEIXEIRA, I. N. de Estudos e P. E. A. Qualidade da educação: uma nova leitura do desempenho dos estudantes da 8ª série do ensino fundamental. INEP/MEC, Brasília, 2003.

VALENTE, J. A. et al. O computador na sociedade do conhecimento. *Campinas: Unicamp/NIED*, v. 6, 1999.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press Inc., 1983. p. 127–174.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise psicológica*, Instituto Superior de Psicologia Aplicada, v. 5, p. 75–90, 1986.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *Research agenda for mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades*, Lawrence Erlbaum Associates., p. 141–161, 1988.

VERGNAUD, G. *Gérard Vergnaud em Diálogo com a Psicologia Contemporânea*. 2009.

VERGNAUD, G.; PRÉVOST, P. Homomorphismes réel-représentation et signifié-signifiant: Exemples en mathématiques. *Didaskalia*, Persée-Portail des revues scientifiques en SHS, v. 5, n. 1, p. 25–34, 1994.

VOSNIADOU, S.; IOANNIDES, C.; DIMITRAKOPOULOU, A.; PAPADEMETRIOU, E. Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and instruction*, Elsevier, v. 11, n. 4-5, p. 381–419, 2001.

VOSNIADOU, S.; VERSCHAFFEL, L. Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. Elsevier Science, 2004.

WESSELS, H. M. *Types and levels of data arrangement and representation in statistics as modeled by grade 4-7 learners*. Tese (Doutorado) — University of South Africa, 2006.

WOLFRAM, A. *Computational Inteligence*. 2010. <https://www.wolframalpha.com/>.

WOOD, D.; BRUNER, J. S.; ROSS, G. The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 17, n. 2, p. 89–100, 1976.

YEH, A.; NASON, R. Mixing colours: An ict tool based on a semiotic framework for mathematical meaning-making about ratio and fractions. In: MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA. *Navigating Currents and Charting Directions: MERGA 31 Conference Proceedings (Vol 1)*. [S.l.], 2008. p. 605–611.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 27, n. 5, p. 540–563, 1996.

Apêndices

APÊNDICE A – Anuência das entidades parceiras

Autorização para execução de pesquisas

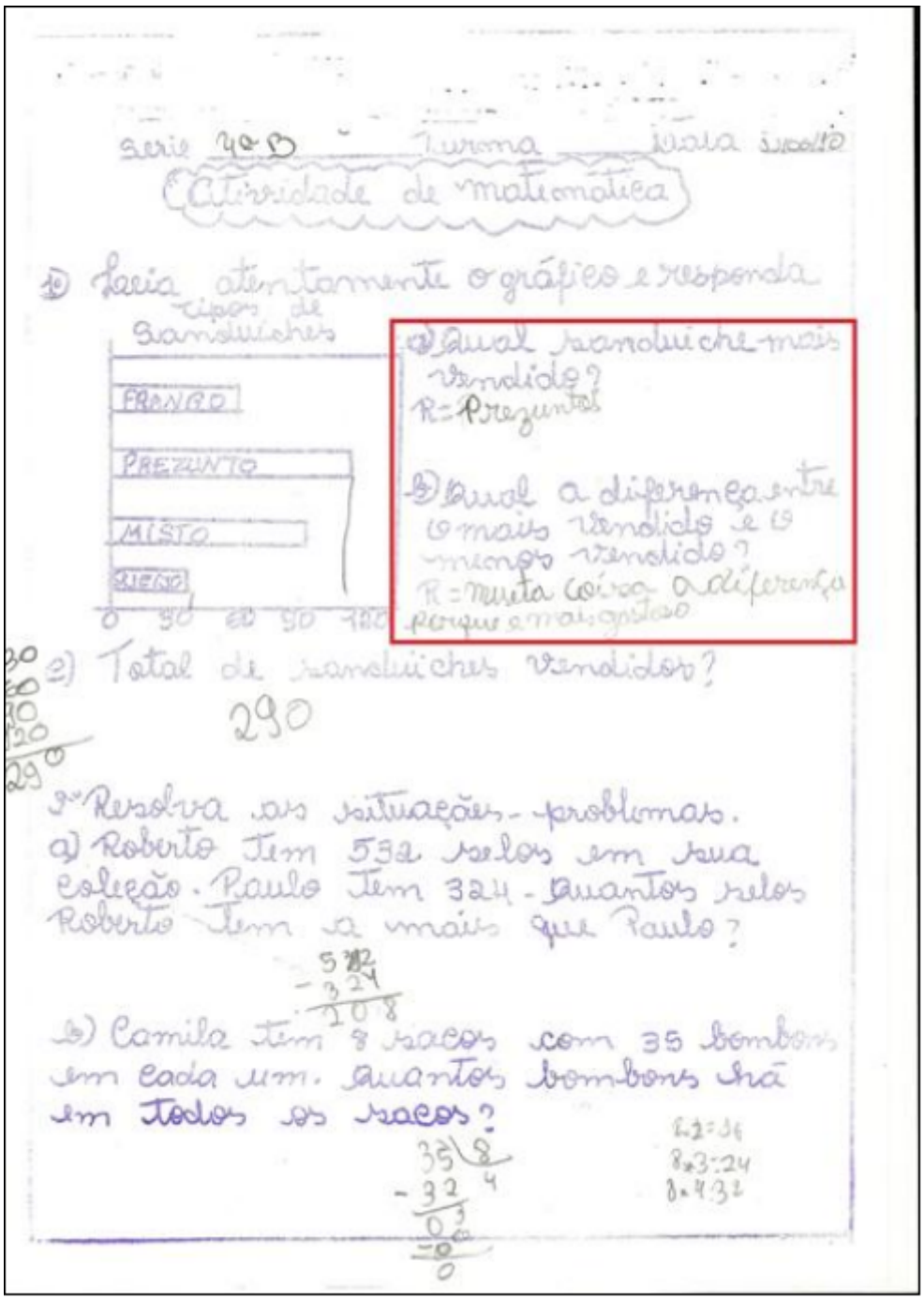
Tendo conhecimento das ações empreendidas no projeto de pesquisa intitulado: A CONCEITUALIZAÇÃO SOBRE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL I NO USO DE FORMAS DE REPRESENTAÇÃO VISUAL, conduzido no programa de doutoramento da professora Ana Emilia de Melo Queiroz por meio do convênio MINTER-DINTER-UNIVASF-UFES, autorizamos a execução de tal projeto nas escolas no município de Juazeiro BA.

Juazeiro, 03 de Novembro de 2009

Gerência de Valorização do Professor e Formação Continuada

Clériston José da S. Andrade
Gerente de Valorização e
Formação Continuada SEDUC
Dec. 176/09

APÊNDICE B – Exemplo de prova aplicada nas escolas



Série 4ª B Turma Escola

Atividade de Matemática

1) Leia atentamente o gráfico e responda

Tipos de sanduíches

FRANGO

PREZUNTO

MISTO

SIENO

0 30 60 90 120

a) Qual sanduíche mais vendido?
R= Prezunto

b) Qual a diferença entre o mais vendido e o menos vendido?
R= muita coisa a diferença porque é mais gostoso

2) Total de sanduíches vendidos?

290

2ª Resolva as situações-problemas.

a) Roberto tem 532 selos em sua coleção. Paulo tem 324. Quantos selos Roberto tem a mais que Paulo?

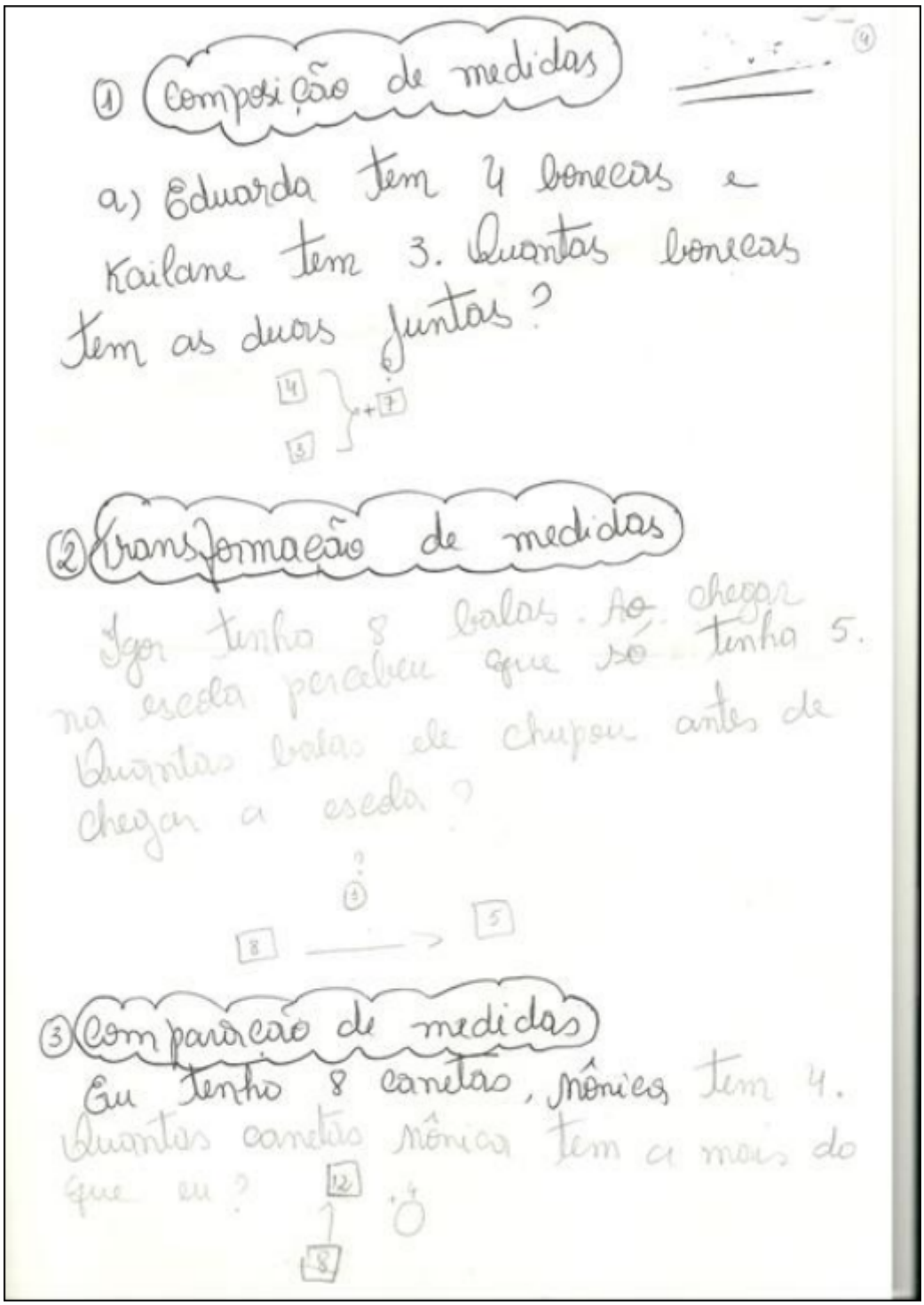
532
- 324
208

b) Camila tem 8 sacos com 35 bombons em cada um. Quantos bombons há em todos os sacos?

35 | 8
- 32 | 4
03
- 0
0

8x2=16
8x3=24
8x4=32

APÊNDICE C – Exemplo de prova aplicada aos alunos



① Composição de medidas

a) Eduarda tem 4 bonecas e Kailane tem 3. Quantas bonecas tem as duas juntas?

4 + 3 = 7

② Transformação de medidas

Igor tinha 8 balas. Ao chegar na escola percebeu que só tinha 5. Quantas balas ele chupou antes de chegar a escola?

8 → 5

③ Comparação de medidas

Eu tenho 8 canetas, Mônica tem 4. Quantas canetas Mônica tem a mais do que eu?

12

8

APÊNDICE D – Certificado de autorização do Comitê de Ética

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF
COMITÊ DE ÉTICA E ESTUDOS EM HUMANOS E ANIMAIS - CEEHA

Prezada pesquisadora,

É com satisfação que informamos formalmente ao Vª. Sr.ª que o projeto "**A CONCEITUALIZAÇÃO SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS NO USO DE FORMAS DE REPRESENTAÇÃO VISUAL EM UMA INTERFACE EDUCATIVA**" foi aprovado pelo Comitê de Ética e Estudos em Humanos e Animais (CEEHA) em reunião ordinária realizada no dia 22 de Abril de 2010. A partir de agora, portanto, V.ª Sr.ª pode dar início à fase prática ou experimental de vosso projeto. Informamos ainda que no prazo máximo de 1 (um) ano, a contar da data desse documento, deverá ser enviado a esse Comitê um relatório sucinto sobre o andamento da presente pesquisa. Informamos que para efeito de publicação, o presente projeto encontra-se registrado sob o nº de protocolo 22041001 CEEHA/UNIVASF.

Pesquisadora responsável: **ANA EMILIA DE MELO QUEIROZ**

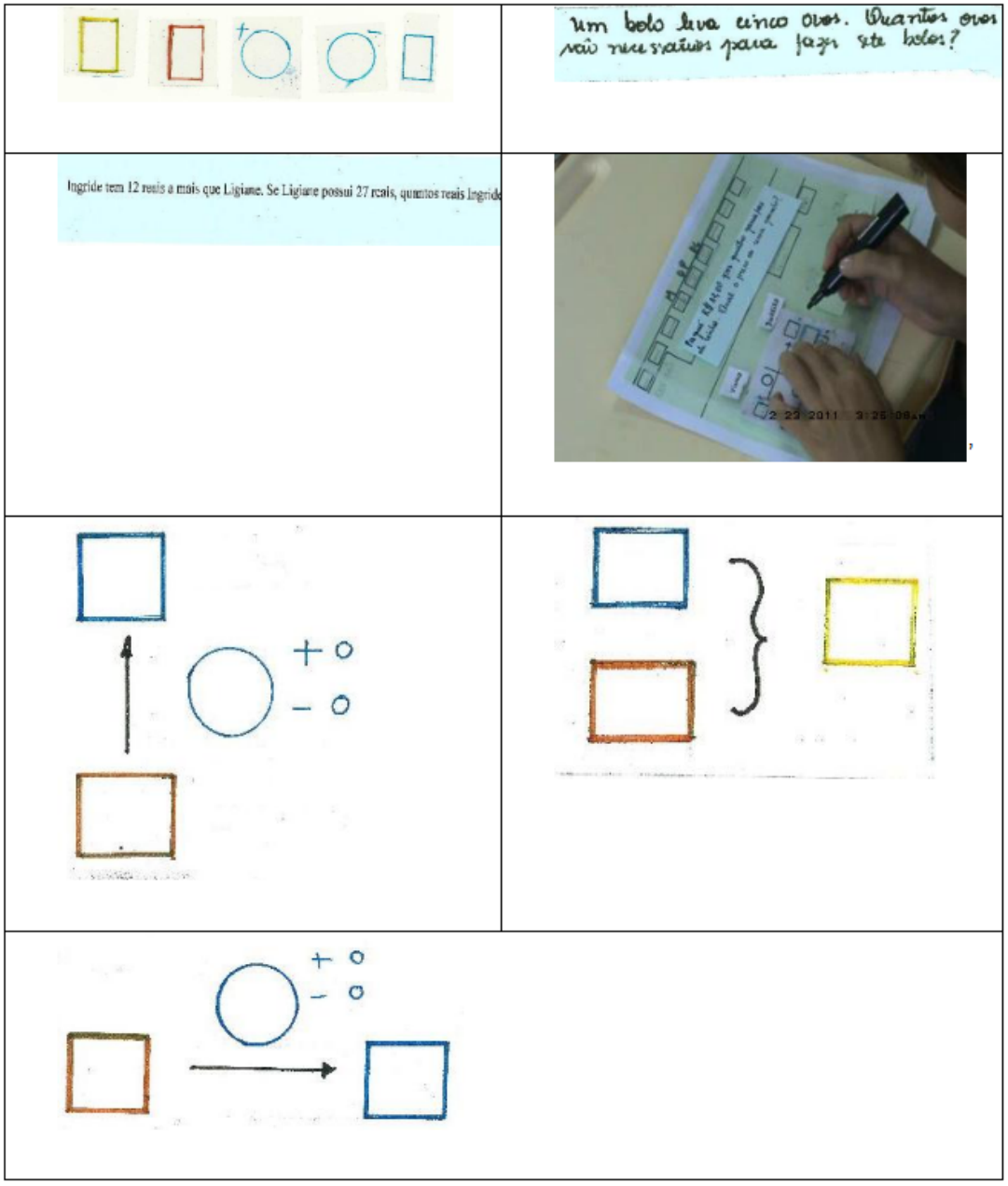
Data da entrada: **15/03/2010**

Petrolina-PE, 27 de outubro de 2011.

(Alexandre H. Reis)
Coordenador CEEHA/UNIVASF

Av. José de Sá Maniçoba, s/n – Centro – Petrolina - PE
CEP 56.304-205 - Petrolina – PE Tel/Fax: (87) 2101-6797 E-mail: cep@univasf.edu.br

ANEXO A – Exemplos de componentes em papel



ANEXO B – Formulario de Consentimento do Participantes

ANEXO 2 - Formulário de Consentimento do Participante

Título do Trabalho: A CONCEITUALIZAÇÃO SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS NO USO DE FORMAS DE REPRESENTAÇÃO VISUAL EM UMA INTERFACE EDUCATIVA.

Você está sendo convidado (a) a participar da pesquisa realizada no âmbito desse projeto. Se decidir participar dela, é importante que leia cuidadosamente as informações contidas neste formulário. Este formulário de consentimento fornece-lhe todas as informações sobre o estudo, tais como, objetivo, procedimento, coleta de dados, privacidade, custos, riscos e informações adicionais. Assim que tiver compreendido o estudo e concordar em participar do mesmo, será solicitado que assine e date este formulário, cuja cópia lhe será entregue para uso pessoal. Caso necessite de maiores esclarecimentos sobre algum item mencionado aqui, ou precise de informações que não foram incluídas, por favor, pergunte aos pesquisadores. Antes de ser informado a respeito do estudo, é importante que tome conhecimento do seguinte:

1. A sua participação é inteiramente voluntária;

2. Você poderá decidir por não participar ou cancelar a sua participação no estudo, a qualquer momento, por qualquer razão, sendo que todos os dados coletados até o referido momento serão descartados. É preciso entender a natureza da sua participação e dar o seu consentimento por escrito. Sua assinatura indicará que você entendeu todas as informações referentes a sua participação e que concorda em participar como voluntário.

Objetivo do Estudo

O objeto dessa pesquisa é a conceitualização de conceitos matemáticos e, mais particularmente, a forma como se deu tal processo no uso das interfaces do Gerard

Pesquisadores

1. Ana Emilia de Melo Queiroz, doutoranda do programa MINTER/DINTER/UFES/UNIVASF.

Todos os pesquisadores acima citados estão sendo orientados pelo prof. Dr Sávio Queiroz da Universidade Federal do Espírito Santo, na disciplina de Desenvolvimento Humano.

Procedimento do estudo

Neste estudo faremos um experimento controlado a fim de testar o protótipo de uma interface educativa. Além disso, serão feitas filmagens das mãos do participante e gravações das suas falas no curso da tarefa.

Coleta de Dados

Os dados coletados são os resultados das filmagens e gravações; no entanto, todos os resultados apresentados na dissertação ou publicações científicas serão anônimos. Seu nome não fará parte dos dados.

Riscos/Desconfortos

Não há possibilidade de riscos ou desconfortos associados à sua participação no estudo.

Custos

Você não terá nenhum gasto com a sua participação no estudo.

Declaração de Consentimento

Declaro que tive tempo suficiente para ler e entender as informações contidas neste formulário de consentimento antes de assiná-lo. Os objetivos e o procedimento foram explicados, bem como o que será requerido de mim. Também recebi respostas para todas as minhas dúvidas. Compreendo que minha participação no estudo é voluntária e que sou livre para me retirar do estudo a qualquer momento, sem aplicação de qualquer penalidade. Confirmo, também, que recebi uma cópia deste formulário de consentimento. Dou meu consentimento de livre e espontânea vontade para participar deste estudo.

Nome do Participante

Data

(em letra de forma)

Atesto que expliquei cuidadosamente a natureza e o objetivo deste estudo. Acredito que o participante recebeu todas as informações necessárias, que foram explicadas em uma linguagem adequada e compreensível.

Nome do Experimentador

Data

(em letra de forma)

Esta pesquisa é parte das atribuições para a obtenção de titulação de Doutor em Psicologia pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Tem por objetivo apresentar um estudo qualitativo sobre aprendizagem de conceitos Matemáticos no uso de uma interface educativa: o Gèrard. Para a viabilização deste estudo, solicitamos a sua colaboração no preenchimento deste questionário, que tem por objetivo coletar informações sobre o perfil do participante da pesquisa e sua experiência com recursos computacionais. Nas questões indicadas, você pode marcar mais de uma opção. Sua participação é fundamental para a realização desta pesquisa. Agradecemos a sua contribuição, e em caso de dúvida, colocamo-nos à disposição para esclarecer qualquer dúvida. Por favor, leia com atenção as questões a seguir. Informações Gerais

Idade entre

Menos de 20 21 e 30 31 e 40

2. Sexo

Masculino Feminino

3. Qual é a sua formação?

graduação especialização mestrado

doutorado outra: _____

Escreva o nome do curso que está fazendo ou fez de acordo com a formação assinalada

acima: _____

Experiência Computacional

1. Há quanto tempo você utiliza o computador?

Menos de 6 meses Entre 2 anos a 3 anos

6 meses a 1 ano Entre 3 anos a 4 anos

Entre 1 ano a 2 anos Mais de 4 anos

2. Em que local você utiliza o computador? (Pode-se marcar mais de uma opção)

em casa

na escola/universidade

no trabalho

outros: _____

3. Em média, quantas horas por dia você utiliza o computador?

Menos de 2 horas Entre 5 a 10 horas

Entre 2 a 5 horas Mais de 10 horas

4. Você utiliza o computador com quais finalidades?

_____

_____

_____

5. Quais tipos de ferramentas você utiliza em suas atividades diárias? (Pode-se marcar mais de uma opção)

Editores de texto (Word, WordPerfect, etc.)

Pacotes de apresentação (PowerPoint, etc.)

Planilhas (e-mail, NetMeeting, etc.)

Comunicação (salas de bate-papo, e-mail, NetMeeting, etc.)

Transferência e troca de documentos

Software educativo

Bancos de dados (Access, Oracle)

Browsers (Netscape, Explorer)

Jogos

Outros, favor especificar: _____

_____

_____

7. Você já utilizou ferramentas colaborativas?

Sim Não

Em caso afirmativo, qual(is) tipo(s) de ferramenta(s) colaborativa(s) você já utilizou (Pode-se marcar mais de uma opção)?

Editores colaborativos síncronos/assíncronos

Chats

Ferramentas para Videoconferência (ex.: Cu-SeeMe)

Whiteboards

Outros, favor especificar (você pode citar o nome da ferramenta):

_____

_____

_____

_____

_____

Muito obrigado por sua participação!

ANEXO C – Entrevista após a resolução de problema

ANEXO 3. - Após a resolução de problema

Tente lembrar-se do seu primeiro contato com o software (dizer o nome do software). Você poderia contar como foi essa situação?

Como você avalia o software?

O que mais surpreendeu você no software?

O que mais o decepcionou no software?

Descreva as principais idéias matemáticas que você observou?

Eu notei [descreva algo que você observou e que você gostaria de perguntar]. Por que você acha que isso aconteceu?

Qual a principal dificuldade que você sentiu no software?

Como superar essa dificuldade?

Há mais alguma coisa que você gostaria de acrescentar?

ANEXO D – Entrevistas realizadas após tarefas

ANEXO 4. Perguntas realizadas após tarefas

Exemplo para composição

Por que você escolheu esta operação (Aqui o pesquisador diz o nome da operação escolhida) para o problema?

O que essa operação significa para você na situação-problema?

De onde você conhece essa operação?

Você arrastou o número (dizer o número arrastado) para este elemento (dizer o nome do elemento). Como você explicaria isso?

O que o número significa para você na situação-problema?

O que o quadrado significa para você na situação-problema?

De onde você conhece esses elementos?

Enquanto estava resolvendo o problema (aqui o pesquisador diz o nome do problema) você teve acesso a uma imagem (aqui o pesquisador diz o nome da imagem) como você percebeu a resolução do problema enquanto a imagem estava disponível? (Aqui o pesquisador está interessado em coletar dados que respondam as questões norteadoras, entretanto não pode haver condução por parte do pesquisador)

Enquanto estava resolvendo o problema (aqui o pesquisador diz o nome do problema) você teve acesso a uma imagem (aqui o pesquisador diz o nome da imagem) como você percebeu a resolução do problema após a visualização da imagem?

Enquanto estava resolvendo o problema (aqui o pesquisador diz o nome do problema) você teve acesso a uma imagem (aqui o pesquisador diz o nome da imagem) como você percebeu a resolução do problema sem a visualização da imagem?

Na resolução do problema com a imagem você resolveu (dizer a abordagem utilizada pelo participante) você explicaria sua abordagem com mais detalhes?

Na resolução do problema sem a imagem você resolveu (dizer a abordagem utilizada pelo participante) você explicaria sua abordagem com mais detalhes?

Ao longo da tarefa foram mostradas n(número de imagens mostradas. Esse número ainda está em aberto). Você poderia explicar com detalhes como a visualização de cada imagem contribuiu na execução da tarefa?

Como você relaciona essas imagens?

Antes de resolver a situação-problema o diagrama não estava preenchido, após a resolução ele estava preenchido. Como você percebe os números que estão no texto e esses que você inseriu no diagrama?

Tratando especificamente do conceito de (dizer o nome do conceito estudado). O que você entendia sobre (dizer o nome do conceito estudado) antes construir o diagrama?

O que você entende agora depois que construiu o diagrama?

1. O que significa o diagrama sem preenchimento para você na situação-problema?

2. O que significa o diagrama preenchido para você na situação-problema?

ANEXO E – Entrevista após a resolução de problema, modificada após o piloto.

ANEXO 5. Após a resolução de problema, modificada após o piloto.

Tente lembrar-se do seu primeiro contato com o software (dizer o nome do software). Você poderia contar como foi essa situação?

Como você avalia o software?

O que mais surpreendeu você no software?

O que mais o decepcionou no software?

Descreva as principais idéias matemáticas que você observou?

Eu notei [descreva algo que você observou e que você gostaria de perguntar]. Por que você acha que isso aconteceu?

Qual a principal dificuldade que você sentiu no software?

Como superar essa dificuldade?

Há mais alguma coisa que você gostaria de acrescentar?

Os dois experimentos desta quarta-feira (12/05/2010) ocorrem na sala da coordenação, que funciona na sala de informática.

Durante a realização do primeiro experimento (na sala da coordenação) ocorrem muitas interrupções: os professores entram e saem da sala, alguns conversam ao lado da professora que participa do experimento, e os alunos entram na sala procurando pela coordenadora ou pelas professoras. Fora da sala da coordenação ocorre uma feira, referente a comemoração do dia das mães, o que poderia estar colaborando para uma maior movimentação naquele dia na escola.

1. S1

A participante resolve a questão 1, que envolve a categoria composição com êxito. Na resolução da questão 2, a qual envolve um raciocínio de composição de quantidades, e

um número relativo alto, e a participante escolhe a categoria transformação, mas lhe é oferecida uma dica sobre tal categoria e ela desfaz a ação e em seguida escolhe composição. Ela justifica seu erro dizendo que “errei a categorização porque só estava conseguindo visualizar a conta”. Na questão 3 a participante escolhe a categoria transformação, cometendo um erro, pois trata-se de uma composição, e recebe uma dica e desfaz a ação, escolhendo composição.

Ao final da resolução da questão 3 a participante justifica seus erros, dizendo que achou que pudesse escolher qual das três categorias gostaria de utilizar antes de resolver as questões, conforme tinha visto num modelo anterior.

Durante a resolução da questão 4 a participante escolhe corretamente a categoria (transformação), erra o posicionamento e desfaz a ação, mas erra novamente (falta ajuda). Nesse momento há uma interferência de outras professoras na sala e de aparelhos celulares tocando. É permitido que ela refaça a questão, e então ela escolhe a categoria, coloca o sinal(-) e depois modifica para o (+). É solicitado que a participante desenhe a seta que indique a transformação (o experimentador indica o sentido da seta com o dedo).

A questão 5 envolve a categoria transformação, a participante resolve corretamente, mas erra o resultado (25 - 18= 13). Na última questão também envolvendo transformação a participante escolhe a categoria correta e utiliza o sinal correto.

Por fim, após resolver todas as questões, a participante afirma que à medida que resolvia os problemas, aprimorava a sua habilidade, proporcionando “um trabalho gostoso”.

Sugestões:

- Criar um roteiro de instruções para explicar como o protótipo funciona e quais os recursos que dispõe para proporcionar uma explicação mais objetiva e clara;

- Diminuir interações do experimentador com o participante;

- É importante que o experimentador leia as mensagens literalmente como são apresentadas no protótipo;

- Aguardar sempre o OK do participante para passar para o próximo passo;

2. S2

A participante responde corretamente a questão 1, que envolve composição, na questão 2 que também envolve composição, comete um erro de posicionamento. A questão 3 envolve transformação e a participante escolhe a categoria composição (é oferecida uma ajuda errada), na questão 4 ela escolhe a categoria transformação enquanto o problema envolve composição. Na resolução da questão 5 a participante escolhe a categoria transformação, mas com a ajuda da dica desfaz a ação e escolhe corretamente composição, mas ela erra o posicionamento correto dos valores. (Repetição da questão)

Na questão 6 a participante resolve um problema que envolve comparação (o experimentador esquece de solicitar o desenho da seta para indicar a comparação entre medidas). Nas questões 6 e 7 a participante resolve questões que envolvem a categoria comparação.

Sugestões

- Não seria interessante alternar as categorias das questões? Pois a repetição da mesma categoria pode estar induzindo ao acerto por memorização, e não necessariamente por aprendizado ou compreensão do modelo.

- Elaborar uma mensagem para indicar que o participante acertou “Parabéns!você concluiu com êxito” coisa assim...

ANEXO F – Sugestões feitas pelo observador durante o projeto piloto

ANEXO 6.- Sugestões feitas pelo observador durante o projeto piloto

Os dois experimentos desta quarta-feira (12/05/2010) ocorrem na sala da coordenação, que funciona na sala de informática.

Durante a realização do primeiro experimento (na sala da coordenação) ocorrem muitas interrupções: os professores entram e saem da sala, alguns conversam ao lado da professora que participa do experimento, e os alunos entram na sala procurando pela coordenadora ou pelas professoras. Fora da sala da coordenação ocorre uma feira, referente a comemoração do dia das mães, o que poderia estar colaborando para uma maior movimentação naquele dia na escola.

1. S1

A participante resolve a questão 1, que envolve a categoria composição com êxito. Na resolução da questão 2, a qual envolve um raciocínio de composição de quantidades, e um número relativo alto, e a participante escolhe a categoria transformação, mas lhe é oferecida uma dica sobre tal categoria e ela desfaz a ação e em seguida escolhe composição. Ela justifica seu erro dizendo que “errei a categorização porque só estava conseguindo visualizar a conta”. Na questão 3 a participante escolhe a categoria transformação, cometendo um erro, pois trata-se de uma composição, e recebe uma dica e desfaz a ação, escolhendo composição.

Ao final da resolução da questão 3 a participante justifica seus erros, dizendo que achou que pudesse escolher qual das três categorias gostaria de utilizar antes de resolver as questões, conforme tinha visto num modelo anterior.

Durante a resolução da questão 4 a participante escolhe corretamente a categoria (transformação), erra o posicionamento e desfaz a ação, mas erra novamente (falta ajuda). Nesse momento há uma interferência de outras professoras na sala e de aparelhos celulares tocando. É permitido que ela refaça a questão, e então ela escolhe a categoria, coloca o sinal(-) e depois modifica para o (+). É solicitado que a participante desenhe a seta que indique a transformação (o experimentador indica o sentido da seta com o dedo).

A questão 5 envolve a categoria transformação, a participante resolve corretamente, mas erra o resultado (25 - 18= 13). Na última questão também envolvendo transformação a participante escolhe a categoria correta e utiliza o sinal correto.

Por fim, após resolver todas as questões, a participante afirma que à medida que resolvia os problemas, aprimorava a sua habilidade, proporcionando “um trabalho gostoso”.

Sugestões:

- Criar um roteiro de instruções para explicar como o protótipo funciona e quais os recursos que dispõe para proporcionar uma explicação mais objetiva e clara;

- Diminuir interações do experimentador com o participante;

- É importante que o experimentador leia as mensagens literalmente como são apresentadas no protótipo;

- Aguardar sempre o OK do participante para passar para o próximo passo;

2. S2

A participante responde corretamente a questão 1, que envolve composição, na questão 2 que também envolve composição, comete um erro de posicionamento. A questão 3 envolve transformação e a participante escolhe a categoria composição (é oferecida uma ajuda errada), na questão 4 ela escolhe a categoria transformação enquanto o problema envolve

composição. Na resolução da questão 5 a participante escolhe a categoria transformação, mas com a ajuda da dica desfaz a ação e escolhe corretamente composição, mas ela erra o posicionamento correto dos valores. (Repetição da questão)

Na questão 6 a participante resolve um problema que envolve comparação (o experimentador esquece de solicitar o desenho da seta para indicar a comparação entre medidas). Nas questões 6 e 7 a participante resolve questões que envolvem a categoria comparação.

Sugestões

- Não seria interessante alternar as categorias das questões? Pois a repetição da mesma categoria pode estar induzindo ao acerto por memorização, e não necessariamente por aprendizado ou compreensão do modelo.

- Elaborar uma mensagem para indicar que o participante acertou “Parabéns!você concluiu com êxito” coisa assim...